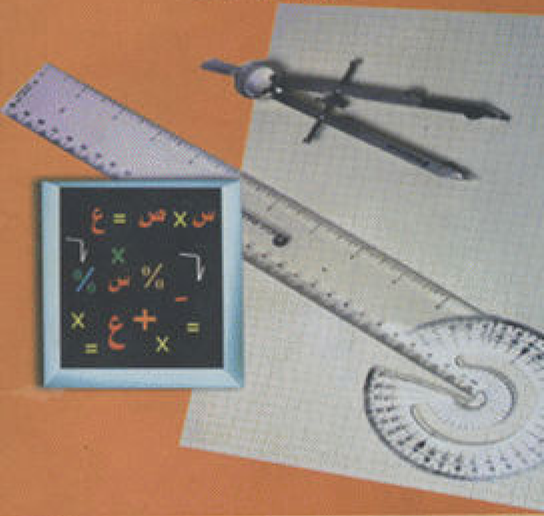
أساسيات الرياضيات

الجبر والهندسة التحليلية والإحصاء

حسين رجب محمد



دار الفجر للنشر والتوزيع

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿ وقل ربى زدنى علما ﴾

صدق الله العظيم

«من الآية 114 من سورة طه»

مقدمة

الحمد لله على ما وفقنى إليه فى إعداد وتأليف كتابى هذا (أساسيات الرياضيات فى الجبر والهندسة التحليلية ومبادئ الاحصاء)، ويسرنى أن أقدمه الى زملائى أساتذة المادة وطلاب الفصل الأول بالمعاهد العليا المختلفة والجامعات.

لقد روعى عند إعداد هذا الكتاب أن يكون مرجع شاملا يغطى موضوعات أساسيات الرياضيات، حيث يتعرض لدراسة المجموعات ومعادلات الدرجة الأولى والثانية ومتباينات الدرجة الأولى والثانية والكسور الجزئية فى علم الجبر.

كما يتناول موضوعات الهندسة التحليلية مبتدءا بالمحاور الكارتيزية والخط المستقيم ومعادلاته ثم القطاعات (المخروطية بأنواعها: الدائرة فالقطع المكافئ والقطع الناقص والقطع الزائد.

وتطرق الكتاب إلى جبر الدوال وهو من الموضوعات الهامة والتى تهم الطالب فى الحياة التطبيقية، حيث قُدمت الدوال بمفهومها الحديث وبعض أنواعها والعمليات التى تُجرى عليها، وأخيراً النهايات بنوعيها المحدودة واللانهائية ثم الدوال المستمرة.

كما يستعرض موضوعات من مبادئ الاحصاء لأهميتها فى الحياة العصرية الحديثة حيث موضوعات التوزيعات التكرارية والمدرج التكرارى والمنحنى

التكرارى والنزعة المركزية مع دراسة ظاهرة التشتت بأنواعها المختلفة.

من هنا جاء دور هذا الكتاب وأهميته إحساسا منى بحاجة الطالب فى مثل هذه المرحلة له. ولمزيد من الايضاح فقد زود الكتاب بالأمثلة المحلولة لكل موضوع على حدة كما دعم بالرسومات البيانية والتمارين.

لا يعتبر هذا الكتاب هو الأول من نوعه إلا أنه يحتوى على الموضوعات الكاملة لمنهج هذه المرحلة، وبذلك يتيح للطالب توفير الوقت والجهد وعناء البحث عما يحتاجه من موضوعات مختلفة فى كتب عديدة.

آمل بتقديم هذا الكتاب أن يكون عوناً وسنداً للطالب راجيا أن يحقق ما نصبوا إليه من رفع المستوى العلمى للطالب العربى. كما أرجو أن أكون قد وُفِقت فى إضافة جديدة الى المكتبة العربية. وانه ليسعدنى أن أُقدم الشكر لكل من تعاون معى وساهم فى إنجاز هذا العمل وأخص بالشكر الاستاذ أحمد زكى والاستاذ عبد الحى أحمد فؤاد، اللذان قدما لك ما لديهما من جهد لإتمام هذا الكتاب.

والله ولى التوفيق.

المؤلف

الباب الأول

الجبر

المجموعــات

تعريف:

المجموعة هى تجمع من الأشيـاء أو العناصر المعروفة والمحددة تحديـدا تاما.

أمثلة للتجمعات التى تمثل مجموعة فهي:

1- أعضاء هيئة التدريس الذين يدرسون بالمعهد حاليا.

2- المواد الدراسية التى تدرس بالمعهد.

3- أيام الأسبوع.

4- شهور السنة الميلادية

وغيرها.

أما التجمعات التى لا تمثل مجموعة فهي:

1- أعضاء هيئة التدريس بالمعهد فى العام القادم.

2- الصفات التى تحدد الأخلاق الحميدة.

وغيرها.

طرق كتابة المجموعات:

يتم كتابة المجموعة بين قوسين بهذا الشكل { }، وذلك بإحدى الطريقتين:

1- طريقة السرد أو الحصر (ألقائمة).

2- طريقة الصفة المميزة (الأسلوب الرمزي).

وقد أصطلع علٰى إستخدام الأحرف الكبيرة للتعبير عن المجموعات.

مثـــال 1:

أكتب بطريقة السرد (ألقائمة) والصفة المميزة (الأسلوب الرمزى):

1- أيام الأسبوع.

2- الحروف الأبجدية لكلمة معهد.

الحل:

طريقة السرد (القائمة):

1- سـ = { السبت والأحد والاثنين و........ ، الجمعة}

2- صـ = { م و ع ، هـ ، د }

طريقة الصفة المميزة (الأسلوب الرمزى):

١- سـ = {س : س يوم من أيام الأسبوع}

2- صـ = { ص : ص حرف من الحروف الأبجدية لكلمة معهد}

حيث سـ تعبر عن مجموعة أيام الأسبوع.

، صـ تعبر ن الحروف الأبجدية لكلمة معهد.

: أو / بمعنى حيث أن.

ملاحظات هامة:

1 عنصر المجموعة لا يتكرر.

2- يمكن تغيير ترتيب عناصر المجموعة.

مثال 2:

عبر بطريقة السرد (القائمة) عن الأرقام المكونة للعدد 7.5.2.4.3 ,2, 3

الحل:

سـ = { 7, 5, 2, 4,3 }

مثـــال 3:

عبر بطريقة الصفة المميزة (الأسلوب الرمزى) عن المجموعة:

س = { 1, 2, 3 , ...,19 }

الحل :

س = { س : س عدد صحيح موجب أقل من 20 }

أنواع المجموعات:

1- المجموعة المحددة:

هى المجموعة التى عدد عناصرها محدد مثل أيام الأسبوع.... إلخ.

2- المجموعة الغير محددة:

هى المجموعة التى عدد عناصرها غير منتهية مثل:

(أ) مجموعة الأعداد الزوجية.

(ب) مجموعة الأعداد الفردية.

3- المجموعة الجزئية:

يقال أن المجموعة X جزء من المجموعة Y عندما تكون جميع عناصر المجموع X من ضمن عناصر المجموعة Y.

4- المجموعة الشاملة:

ويرمز لها عادة بالرمز μ وهى المجموعة التى لا تحتوى على عدد ما من المجموعات الجزئية.

5- المجموعة الخالية:

ويرمز لها عادة بالرمز ϕ وهى المجموعة التى لا تحتوى على أية عناصر

مثل:

(أ) مجموعة الطلاب التى تزيد أعمارهم عن مائة عام.

(ب) مجموعة الأعداد الصحيحة المحصورة بين 2 ,1.

(جـ) مجموعة الطلاب التى تزيد أطوالهم عن سبعة أمتار.

وغيرها.

المجموعات المتساوية:

تتساوى مجموعتان إذا كان عدد عناصرهما متساو لهما نفس العناصر

كالآتى:

$X = \{2, 4, 6, 8\}$

$Y = \{8. 6, 2, 4\}$

$X = Y$

مثال 4:

أوجد قيمة m إذا كانت $X = Y$ حيث :

$X = \{1, 3, 5, 7\}$

$Y = \{1, 3, 7, m\}$

الحل:

بمقارنة عناصر المجموعتين نستتج أن :

$m = 5$

المجموعات المتكافئة:

تتكافأ المجموعتان إذا كان عدد عناصرهما متساو مثل:

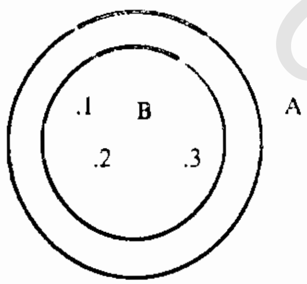
$X = \{ m, n, s\}$

$Y = \{ 2, 5, 3 \}$

$\therefore X \equiv Y$

تمثيل المجموعة :

تمثل المجموعة غالبا بأشكال هندسية تسمى أشكال ڤن حيث تمثل المنطقة داخل الشكل بعناصر المجموعة شكل (1) حيث المجموعة A تحتوى المجموعة B المجموعة B تشمل العناصر 1 ,2 ,3 بمعنى أن العنصر 1 ينتمى إلى ,B وكذلك 3, 2.



شكل (١)

العلاقة بين عنصر ومجموعة:

تكون العلاقة بين عنصر ومجموعة إما إنتماء للمجموعة أو عدم إنتماء لها

ويرمز للإنتماء بالرمز $\in$ وعدم الانتماء بالرمز $\notin$ ويوضحها المثال الآتي:

مثال 5:

إذا كان

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$Y = \{ 2, 3, 5 \}$

فيقال أن العنصر 4 ينتمي للمجموعة X وتكتب هكذا:

$4 \in X$

ويقال أن العنصر 5 لا ينتمي للمجموعة X وتكتب هكذا:

$5 \notin X$

العلاقة بين مجموعة وأخرى:

تكون العلاقة بين أي مجموعة وأخرى إما أن تكون جزء منها أو ليست جزء منها، ويرمز للجزء من بالرمز $\subset$ وليست جزء من بالرمز $\not\subset$ ويوضحها المثال الآتي:

مثال 6:

إذا كان :

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$
$Y = \{2, 3, 5 \}$
$Z = \{ 1, 2 \}$

يقال أن المجموعة Z جزء من المجموعة X وتكتب هكذا:

$Z \subset X$

ويقال أن المجموعة Y ليست جزء من المجموعة X وتكتب هكذا:

$Y \not\subset X$

ويقال أيضا أن المجموعة X تحتوى المجموعة Z وأن المجموعة X لا تحتوى المجموعة Y وذلك فى حالة قراءة الرموز من الجهة اليمنى.

العمليات التى تتم بين المجموعات:

أ- إتحاد مجموعتين:

ينتج مجموعة جديدة من الاتحاد عناصرها هى مجموع عناصر المجموعتين بدون تكرار للعناصر المتكررة. ويرمز بعملية الاتحاد بالرمز U.

مثال 7:

إذا كان :

$X = \{ 1, 3. 5 \}$

$Y = \{ 5, 7. 9 \}$

أوجد XUY

الحل :

$XUY = \{ 1. 3. 5, 7. 9 \}$

قواعد خاصة بالاتحاد :

1- $X \subset (XUY)$

2- $Y \overline{\subset} (XUY)$

3- $XUX = X$

4- $XU\phi = X$

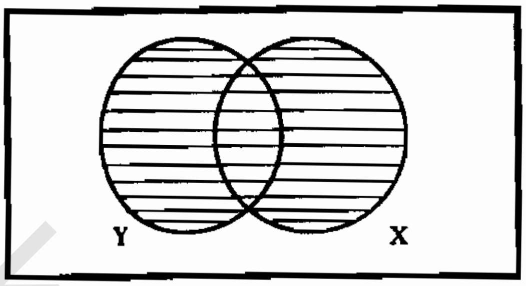
5- $X \subset Y$ إذا كان X جزء من Y أي أن

$\therefore XUY = Y$

6- XUY = YUX

7- XU (YUZ) = (XUY) UZ

ملحوظة: تظلل منطقة الاتحاد وتمثل كما بشكل 2.

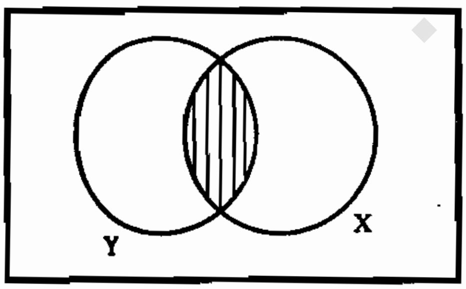


شكل (2)

XUY

II- تقاطع مجموعتين:

ينتج مجموعة جديدة من التقاطع، عناصرها هى العناصر المشتركة فى المجموعتين. ويرمز لعملية التقاطع بالرمز ∩ ويمكن تمثيلها كما بشكل 3 حيث تظلل منطقة التقاطع.



شكل (3)

X∩Y

مثال 8 :

إذا كان :

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

$Y = \{2, 3, 5, 10\}$

أوجد : $X \cap Y$

الحل:

$X \cap Y = \{2, 3\}$

قواعد خاصة بالتقاطع:

1- $X \cap Y \subseteq X$

2- $X \cap Y \subseteq Y$

3- إذا كانت $X = Y$ فإن :

$X \cap Y = X$ أو $= Y$

4- إذا كانت $X \subseteq Y$ فإن :

$X \cap Y = X$

مثال 9 :

إذا كان :

$X = \{2, 6\}$
$Y = \{2, 4, 6\}$

أوجد : $X \cap Y$

الحل:

$X \cap Y = \{2, 6\} = X$

إذا كان :

5-

$X \cap Y = \phi$

فإن المجموعة X منفصلة عن المجموعة Y

6- $X \cap Y = Y \cap X$

مثال 10 :

إذا كان :

$X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$

$Y = \{ 2, 3, 5, 10 \}$

أوجد $Y \cap X$, $X \cap Y$

الحل :

$X \cap Y = \{2, 3\}$

$Y \cap X = \{2, 3\}$

$\therefore X \cap Y = Y \cap X$

7- $X \cap Y \sqsubset X \cup Y$

حيث نجد في المثال السابق أن:

$X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\}$

$\therefore X \cap Y \sqsubset X \cup Y$

8- $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$

فى هذه القاعدة توزع عملية التقاطع على الاتحاد

9- $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$

فى هذه القاعدة توزع عملية الاتحاد على التقاطع.

ملحوظة: يترك للطالب إثبات هذه القواعد حيث يمثل مجموعات Z, Y, X ويفرض لها عدة عناصر لإثبات المطلوب.

المجموعة المكملة :

إذا كانت المجموعة الشاملة هى μ وكانت X مجموعة جزئية من μ، فإن المجموعة المكملة لـ X ويرمز لها بالرمز X^c تعرف كالآتى:

$$X^c = \{ x : x \notin X, x \in \mu \}$$

مثال 11:

إذا كان :

$\mu = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$
$X = \{1, 5, 9 \}$

أوجد المجموعة المكملة لـ X أو X^c.

الحل:

$X^c = \{ 1, 5, 9 \}$

قواعد خاصة للمجموعة المكملة :

إذا كانت μ هى المجموعة الشاملة وكانت X مجموعة جزئية منها. فإننا نلاحظ القواعد الآتية:

1- $(X^c)^c = X$

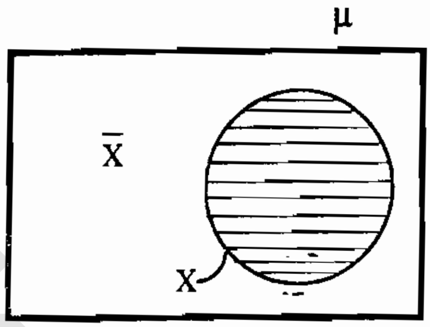
2- $X \cap X^c = \phi$

3- $\mu^c = \phi$

4- $X \cup X^c = \mu$

ملحوظة:

يعبر الرمز c (المتواجد فوق رمز المجموعة) عن المكملة وأحيانا يوضع بدله شرطه لتصبح $\overline{X}$ رمزاً للمجموعة المجملة لـ X، وتمثل كما بشكل (4)



شكل (4)

يبين الشكل :

المجموعة X

المجموعة المكمله $X^c = \overline{X}$

المجموعة الشاملة μ

فرق بين مجموعتين:

يعرف فرق بين مجموعتين B, A فى حالتين على النحو الآتى:

1- $A - B = \{a : a \in A , a \notin B\}$

الفرق فى هذه الحالة يكون جميع العناصر الموجودة فى المجموعة A وغير موجودة فى المجموعة B.

2- $B - A = \{ b : b \in B, b \notin A \}$

أما الفرق فى هذه الحالة فيكون جميع العناصر الموجودة فى المجموعة B

وغير موجودة فى المجموعة A.

مثال 12 :

إذا كان :

$A = \{ 1, 3, 5, 9 \}$

$B = \{ 2, 5, 7, 9 \}$

أوجد :

1- A - B
2- B - A

الحل :

$A - B = \{ 1, 3 \}$

$B - A = \{ 2, 7 \}$

قواعد خاصة بالفرق بين مجموعتين :

1- $A - B \neq B - A$
2- $A - B \cap B\text{-}A = \phi$

3- إذا كانت المجموعة A جزء من المجموعة B

$\therefore A - B = \phi$

مثال 13 :

إذا كانت μ هى المجموعة الشاملة، B, A مجموعات جزئية منها بحيث

أن:-

$\mu = \{ 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots\ldots, 9, 10 \}$

$A = \{ 1, 3, 4, 5, 8 \}$

$B = \{ 2, 4, 6, 8, 9 \}$

أوجد :

$A\cap B$, AUB , B^c, A^c

$(A\cap B)^c$, $(AUB)^c$, $A^c \cap B^c$, A^cUB^c

الحل:

$A^c = \{2, 6, 7, 9, 10\}$

$B^c \{1, 3, 5, 7, 10\}$

$AUB= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$A\cap B = \{4, 8\}$

$(AUB)^c = \{7, 10\}$

$A^cUB^c = \{2, 6, 7, 9, 10, 1, 3, 5\}$

$A^c\cap B^c \{7, 10\}$

$(A\cap B)^c = \{1, 2, 3, 5, 7, 9, 10\}$

من هذا المثال نلاحظ الآتى:

1- $(AUB)^c = A^c\cap B^c$

2- $(A\cap B)^c = A^cUB^c$

وهو ما يعرف بقانونى مورجان.

ضرب مجموعتين:

أولا: إذا كانت :

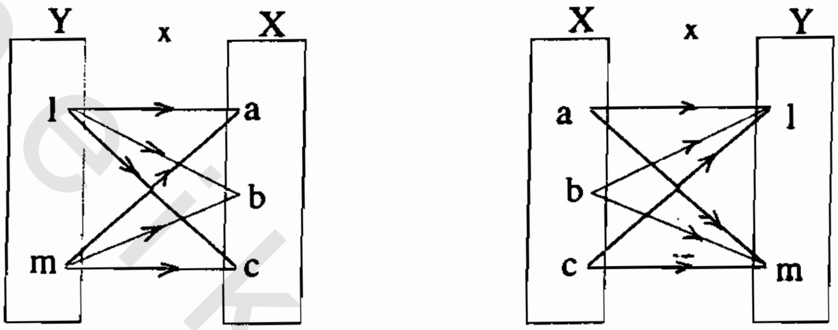
$X = \{a, b, c\}$

$Y \{ l, m\}$

$\therefore X \times Y = \{(a,l), (a, m), (b, l), (b, m), (c, l), (c, m),\}$

$, Y \times X = \{(l,a)(l,b), (l,c), (m, a), (m, b), (m, c)\}$

يعرف الضرب السابق بالضرب الكارتيزى ويمكن تمثيله بالاسهم بشكل 5.



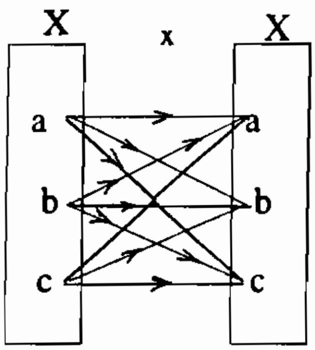
شكل (5)

ثانيا: إذا كانت :

$X = \{ a, b, c \}$.

$\therefore X \times X = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c,b), (c, c)\}$

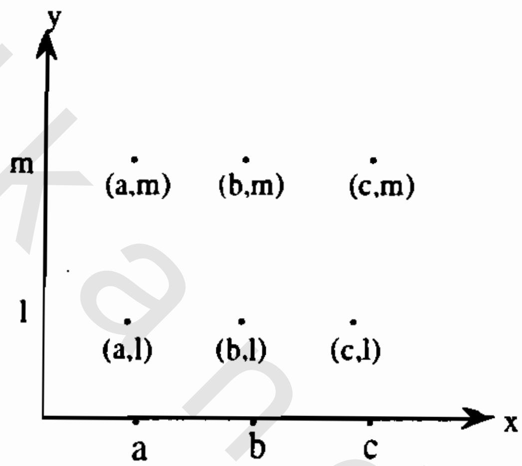
ويمكن تمثيل حاصل الضرب الكارتيزى بالاسهم كما بشكل 6



شكل (6)

تمثيل الضرب الكارتيزى بيانيا:

يمكن تمثيل الضرب الكارتيزى بيانيا حيث عناصر المجموعة X تمثل على المحور x وعناصر المجموعة Y تمثل على المحور y كما بالشكل 7



شكل 7 يبين حاصل الضرب X x Y

حيــث :

$X = \{a, b, c\}$

$Y = \{l, m\}$

ملحوظة هامه :

حاصل الضرب يعتبر مجموعة من الازدواج المرتبة حيث :

$X \times Y \neq Y \times X$

مثال 14:

إذا كان :

$A = \{ 1, 3 \}$

$B = \{ x, y, z \}$

أوجد :

a- $A \times B$ b- $B \times A$

الحـــل :

$A \times B = \{(1, x), (1, y), (1, z), (3, x), (3, y), (3, z)\}$

$B \times A = \{(x, 1), (x, 3), (y, 1), (y, 3), (z, 1), (z, 3)\}$

تماريـــــن (1)

1- ما هى المجموعة الشاملة لكل مما يأتى:

a- A= {3, 7, 11, 19}

b- B= {فرنسا ، ألمانيا ، انجلترا، ايطاليا}

c- C= {سرت، بنى غازى ، طرابلس}

d- D= {السويس والقليوبية ، الاسكندرية، القاهرة}

2- إذا كانت μ هى مجموعة الأعداد الطبيعية فما هى المجموعة المكملة للمجموعة A حيث :

A = { 1, 3, 5, ... }

3- اكتب مجموعة الأعداد الطبيعية A حيث:

A = { x : 5 مجموعة الأعداد التى تقبل القسمة على x }

بطريقة القائمة.

4 - بيّن أي من العلاقات الآتية صحيحة وأى منها خطأ:

a- $D \in A$

b- $1 \subset A$

c- $\{1\} \subset A$

d- $\{1\} \in A$

e- $5 \in A$

f- $2 \in A$

حيث:

A = {1, 3, 5, 7}
B = (3, 5}
C= {2}
D= {5, 7, 9}

5- إذا كانت :

$A= \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$C= \{2, 3, 4, 5\}$

$D= \{3, 4\}$

ضع الرمز (المناسب $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, في كل مما يأتي:

a) $3 \ldots A$
b) $2 \ldots D$
c) $C \ldots D$
d) $C \ldots B$
e) $\phi \ldots A$
f) $A \cap B \ldots C$

6- إذا كانت μ هي المجموعة الشاملة حيث :

$\mu = \{ x : o < x < 10\}$

$P, K, F \subset \mu$

$P = \{ x : 1 < x < 4 \}$

$K = \{ 1, 3, 5 \}$

$F = \{ 2, 4, 6\}$

أوجد الآتي:

a) $P \cup K$
b) $P \cap k$
c) P^c
d) $P - K$
e) $K - P$
f) $P \cap (K \cup F)$
g) $(P \cup K) \cap F$
h) $(P \cup F) \cap (K \cup F)$

7- إذا كانت μ هي المجموعة الشاملة حيث :

$\mu = \{-10, -9, -8, \ldots, \ldots, 9, 10\}$

وكان $A \geq -4$, $B > -8$, $C \leq 8$ مجموعات جزئية من μ فأوجد:

A^c , $(AUB)^c$ ، $A \cap B$, $A \cap C$

8- إذا كانت μ تمثل المجموعة الشاملة حيث:

$\mu = \{x : -2 < x \leq 8\}$, A, B, C, $\sqsubset \mu$

$A = \{1, 3, 5, 7\}$

$B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$C = \{o\}$

أ- حدد عناصر المجموعة الشاملة μ

ب- أوجد كل من :

a) $A \cup B$

b) $A \cap B$

c) $A - C$

d) $(A \cap C)^c$

9- إذا كانت :

$X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$Y = \{4, 8, 12, 16\}$

$Z = \{12, 18, 14\}$

أوجد حاصل ضرب الآتى:

a) $X \times Y$

b) $X \times Z$

c) $Z \times Z$

d) $(X - Y) \times Z$

e) $(X \cap Y) \times Z$

10- إذا كانت :

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

ارسم الشبكة البيانية ($X \times X$) وأوجد عليها الآتى:

(a) L : مجموعة أزواج مرتبة مجموع عنصريها أقل من 6.

(b) M : مجموعة أزواج مرتبة والعنصر الأول أكبر من العنصر الثانى.

(c) $L \cap M$.

الأعداد الحقيقيـــــة

من المجموعات الهامة فى الرياضيات ويرمز لها بالرمز R وتشمل :-

1- مجموعة الأعداد الصحيحة:

ويرمز لها بالرمز Z وتشمل :

أ- العنصر المحايد:

وهما الصفر والواحد.

ب - الأعداد الطبيعية N :

وهى مجموعة الأعداد الناتجة من الاضافة المتكرره للعدد واحد.

$N = \{ 1, 2, 3, ... , ... \}$

جـ - الأعداد الصحيحة السالبة N- :

وتسمى مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة.

أىّ أن الأعداد الصحيحة Z يمكن كتابتها على الصورة:-

$$Z = \{-N\} \cup \{N\} \cup \{O\}$$
$$= O, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm ......$$

2- مجموعة الأعداد النسبية Q:

ويمكن التعبير عنها بالمجموعة :

$$Q = \{x : x = \frac{a}{b} , a, b \in Z , b \neq O\}$$

مثال لذلك : $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$ ، ....

وبالتالى يمكن وضع العلاقة الآتية بين المجموعات:

$$R \supset Q \supset Z \supset N$$

3- مجموعة الأعداد الغير نسبيه I:

ومثال لذلك : $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, Π , $\sqrt{5}$ + $\sqrt{3}$

ويمكن التعبير عنها بالمجموعة I كالآتي:

$$I = \{y : y = \frac{c}{d} \quad , c \text{ or } d \notin Z, d \neq o\ \}$$

واتحاد مجموعة الأعداد النسبية Q مع الأعداد الغير نسبيه I يكون مجموعة الأعداد الحقيقية أيّ أن :

$$R = Q \cup I \quad , \quad Q \cap I = \phi$$

وميزة الأعداد الحقيقية إنه يمكن تمييزها على خط مستقيم (خط الأعداد) وإيضاح المجالات (الفترات) عليه.

بعض خواص الأعداد الحقيقية:

من الأهمية معرفة خواص الأعداد الحقيقية نذكر منها الآتى:

بفرض أن z, y, x أعداد حقيقية فإن:

1- $x + z = y + z \rightleftharpoons x = y$ (خاصية الحذف للجمع)

2- $x.z = y.z,\ z \neq o \rightleftharpoons x = y$ (خاصية الحذف للضرب)

3- $x.y = o \rightleftharpoons$ x=o أو y = o (قاعدة عوامل الصفر)

إذا كان $a \in R$, $b \in R$ فإن :-

4- $a.o = o$

5- $(-1)\ a = -a$

6- $-(-a) = a$

7- $-(a+b) = (-a) + (-b)$

8- $(-a)\ b = a(-b) = -ab$

9- $(-a)\ (-b) = ab$

10- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \quad , b \neq o$

11- $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \quad , b \neq o$

وبفرض أن جميع مقامات هذه الكسور لا تساوى صفرا فإن :

12- $b\left(\frac{a}{b}\right) = a$

13- $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$

14- $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

15- $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightleftharpoons ad = bc$

16- $\frac{ad}{bd} = \frac{a}{b}$

17- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

18- $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

19 - $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

20- $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

المجال (الفترات) :

يمكن للمتغير x أن يأخذ قيمة من مجموعة أعداد معينة تسمى حيز xأو مجال x وهذا المجال ينقسم إلى قسمين:

1- مجال محدود   2- مجال غير محدود

1- المجال المحدود:

ينقسم بدوره إلى أربعة أقسام كالآتى:

أ- مجال مفتوح:

وفية يأخذ المتغير جميع الأعداد الحقيقية بين عددين ثابتين b,a حيث يعبر عنه بصورة مجموعة كالآتى:

$$X = \{x : a < x < b\}$$

والرمز المختصر لهذا المجال هو :

(a, b)

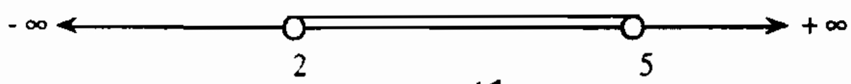
مثال 1 :

ضع المجموعة الآتية على خط الأعداد:

$$X = \{x : 2 < x < 5\}$$

الحل:

نضع دائرة مفتوحة على العدد 5 وأخرى على العدد على خط الأعداد كما بشكل 8.



شكل 8

أى أن المتغير x يأخذ جميع القيم بين العددين 2 , 5 ولا يشمل كلا

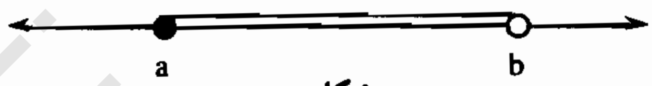
العددين ويعبر عن ذلك بالرمز : $(2, 5)$

ب- مجال نصف مفتوح:

يرمز له بالرمز $[a,b)$ حيث يحتوى المجال جميع الأعداد ابتداء من a وحتى الأصغر من b وتكتب بشكل مجموعة أعداد كالآتي:

$$X = \{x : a \le x < b\}$$

ويمكن تمثيلها على خط الأعداد كما هو واضح بشكل 9.



شكل 9

حيث:

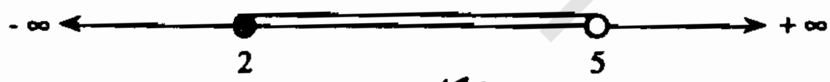
الدائرة المغلقة تعنى أن العدد ضمن المجال.

الدائرة المفتوحة تعنى أن العدد ليس ضمن المجال.

مثال 2:

عبر عن المجال $[2,5)$ على خط الأعداد وفي صورة مجموعة أعداد.

الحل: المجال على خط الأعداد كما بشكل 10.



شكل 10

المجال على صورة مجموعة :-

$$X = \{x : 2 \le x < 5\}$$

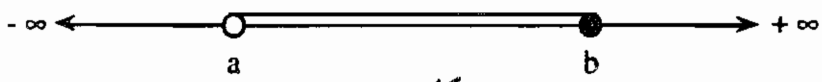
جـ - مجال نصف مفتوح:

ويرمز له بالرمز $(a,b]$ حيث يحتوى المجال على جميع الأعداد الأكبر من a

وحتى العدد b ويعبر عنه بشكل مجموعة كالآتي:

$$X = \{x : a < x \leq b\}$$

وعلى خط الأعداد كما بشكل 11.



شكل 11

د- مجال مغلق:

يرمز له بالرمز [a , b] حيث يحتوى المجال على جميع الأعداد الحقيقية

من a إلى b ويعبر عنه بشكل مجموعة كالآتي:

$$X = \{ x : a \leq x \leq b \}$$

مثـال 3:

عبر عن المجال [2, 5] على خط الأعداد.

الحل: كما هو واضح بشكل 12.

شكل 12

ملحوظـــــة:

يتم التفريق بين المجال المفتوح (a, b) وإحداثيى النقطة التى إحداثيها الأول a والثانى b من خلال المقصود فى التعبير إذا كان مجال مفتوح أو نقطة.

2 - مجال غير محدود:

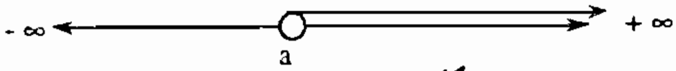
إذا كانت a نقطة معلومة فيكون حيز المتغير وفقا للآتي:

أ - (a, ∞):

ويعبر عنه بصورة مجموعة كالآتى:

$$X = \{x : \quad x > a\}$$

وعلى خط الأعداد كما بشكل 13.



شكل 13

ب- $[a , \infty)$:

ويعبر عنه بصورة مجموعة كلآتى:

$$X = \{x : \quad x \geq a\}$$

ويعبر عن ذلك على خط الأعداد كما بشكل 14.

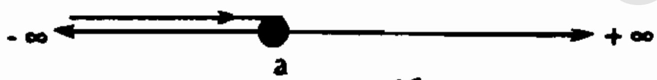
شكل 14

جـ - $(-\infty , a]$:

ويعبر عنه بصورة مجموعة كالآتى:

$$X = \{x : \quad x \leq a\}$$

ويعبر عن ذلك على خط الأعداد كما بشكل 15



شكل 15

د - $(-\infty , a)$.

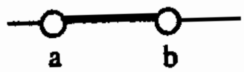
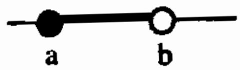
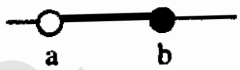
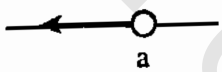
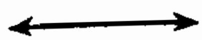
ويعبر عن ذلك بصورة مجموعة كالآتى:

$$X = \{\, x : \quad x < a \,\}$$

ويعبر عن ذلك على خط الأعداد كما بشكل : 16

شكل 16

يمكن تلخيص ما سبق فى الجدول الآتى بصورة مبسطة :

الفترة	تعبير عن الفترة بصورة مجموعة	لتمثيل الهندسى
(a , b)	$\{ x : a < x < b\}$	
$[, b)$	$\{x : a \le x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x : a < x \le b \}$	
$[a, b]$	$\{x: a \le x \le b\}$	
(a, ∞)	$\{x : x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x : x \ge a\}$	
$(-\infty, a)$	$\{x : x < a\}$	
$(-\infty , a]$	$\{x : x \le a\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\{x : -\infty < x < \infty\}$	

تماريـــــن (2)

1- مثل بيانيا كلا من المجموعات أو الفترات الآتيه:

(a) $\{x : 3 \le x < 6\}$

(b) $[-3 , 2]$

(c) $(4, 7)$

(d) $\{x : x < 2\}$

(e) $\{x : -4 \le x \le 6\}$

2- أكتب الفترات الآتية فى صورة تكوين مجموعة :

(a) $[-3 , 5)$ (b) $(3, 9)$

(c) $(-7, -3)$ (d) $(-1, 4)$

3- إذا كانت :

$a = [-3, 5]$

$b = [-1 , 2]$

مثل بيانيا b, a على خط الأعداد . ثم أوجد الآتى:

$a \cup b$, $a \cap b$, $a - b$

التحليـــــل :

تعتبر الأعداد :

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ..., ...

أعدادا أولية حيث لا يوجد تحليل لهذه الأعداد إلى عوامل حاصل ضرب سوى نفس هذه الأعداد والعدد 1 فمثلا :

$2 = 2 \times 1$

$3 = 3 \times 1$

$5 = 5 \times 1$

وهكذا........

أما الأعداد الأخرى فتسمى أعدادا مركبة حيث يمكن تحليلها إلى عوامل حاص ضرب أعداد أولية أو قوى للأعداد الأولية السابق ذكرها فمثلا:

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$= 2^2 \times 3$

$15 = 3 \times 5$

$20 = 2 \times 2 \times 5$

$= 2^2 \times 5$

وهكذا.......

أن يتم تحليل الأعداد المركبة إلى أعداد أولية أو قوى للأعداد الأولية.

وبنفس الطريقة تتناول تحليل كثيرات الحدود معاملاته أعداد صحيحة الى كثيرات حدود معاملاته أيضا أعداد صحيحة فمثلا:

1- $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$

2- $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$

ففى المثال الأول نجد أن العدد 2 لا يمكن تحليله إلى أعداد صحيحة، وبالتالى نقول أن المقدار $x^2 - 2$ لا يمكن تحليله إلى مقادير أو عوامل أولية وبالتالى يعتبر هذا المقدار كثير حدود أولي. أما المثال الثانى فيمكن تحليل المقدار إلى عاملين $(x + 2) \times (x - 2)$ أوليين حيث لا يمكن تحليلهما ثانية. وبالتالى يقال أن كثير الحدود $x^2 - 4$ أمكن تحليله إلى $(x - 2)$ ، $(x + 2)$ كثيرات حدود أولية، ولذلك يسمى المقدار $x^2 - 4$ كثير حدود مركب.

الصيغ الهامة المستخدمة بكثرة فى كثير من التحليلات :

اسم التحليل	التحليل إلى عوامل أولية	كثيرة حدود	
مربع كامل	$(x + y)^2$	$x^2 + 2xy + y^2$	1-
مربع كامل	$(x - y)^2$	$x^2 - 2xy + y^2$	2-
فرق بين مربعين	(x-y (x + y)	$x^2 - y^2$	3-
مجموع مكعبين	$(x+y)(x^2-xy+y^2)$	$x^3 + y^3$	4-
فرق بين مكعبين	$(x-y)(x^2+xy+y^2)$	$x^3 - y^3$	5-

تمارين (3)

1- حلل كثيرات الحدود :

a) $4a^2 - 2a^2b^2 + 25b^2$

b) $a^4 + 6a^2 + 9$

2- حلل كثيرات الحدود :

a) $8a^3 + 27b^3$

b) $a^3 - 64b^3$

c) $a^6 - b^6$

3- حلل كل كثير الحدود ولو أمكن:

a) $2xy + 4x$

b) $(x+y) + 2(x+y)$

c) $(x^2 - y^2) - (x + y)$

d) $x^3 - 125y^3$

e) $x^2 - 3x + 2$

f) $x^2 + 2x - 8$

g) $x^2 + 3x - 10$

h) $x^2 + 11x + 24$

l) $(x + y)^3 - 1$

m) $x^4 + 1$

4 – حلل الآتى :

$6x^2 - xy - 2y^2$

$2x^2 + 7x + 6$

$x^2 - 6x + 8$

$x(x + 2y) + 3y(x + 2y)$

5- أكتب الحد الأوسط فى كل مما يأتى:-

(a) $(a + 2b)(a + 5b)$

(b) $(x + 3)(x - 4)$

(c) $(a - 7)(a + 5)$

(d) $(x - 4)(x - 6)$

(e) $(2a + 3b)(a + 4b)$

(f) $(3x + 4y)(2x - y)$

(g) $(5x - 2)(3x + 1)$

(h) $(7a - 3b)(4a - 2b)$

6- أوجد ناتج المقادير الآتية:

(a) $(a + 7)(a + 3)$

(b) $(x + 5)(x - 3)$

(c) $(L - 8)(L + 1)$

(d) $(a - 6)(a - 5)$

(e) $(x^2 - 2y^2)(3x^2 - 4y^2)$

(f) $(ab - 2cd)(3ab - 4cd)$

(g) $(4Lm - h)(2Lm - 3h)$

(h) $(2x - 5y)(3y - Zx)$

7- أكتب الحد الناقص للمقادير الآتية:

(a) $(2x + 5)(3x - ...) = ... + ... - 10$

(b) $(3a - 2b)(... - 4b) = 15a^2 - ... + ...$

(c) $(4x + ...)(... - 5) = 8x^2 - ... - ...$

(d) $(... - 7)(5a + ...) = 10a^2 - 19a - ...$

8- ضع الآتى فى صورة مختصرة:

(a) $2(3x - 5)(2x + 1) - 3(4x + 1)(x - 7)$

(b) $2a^2 - (a + 4)(3a - 7) + 2(a - 4)(a - 1) - 36$

(c) $10a^2 - 2[3a^2 - (2a - 1)(a + 5) + 2(a + 2)(2a - 1) - 1]$

المعـــــادلات

تعريـــــــف :

المعادلة هي صيغة تعبر عن علاقة التساوى لمتغير (أو عدة متغيرات) وقد يسمى المتغير مجهولا وحل المعادلة معناه إيجاد قيمة المجهول.

أولا : المعادلات الخطية:

هى معادلات من الدرجة الأولى أى أكبر قوى للمتغير (المجهول) فيها يساوى واحد صحيح فهى إما أن تكون:-

I - معادلة من الدرجة الأولى فى مجهول واحد x

II - معادلتين من الدرجة الأولى فى مجهولين y , x (معادلتين آنيتين).

III - ثلاث معادلات من الدرجة الأولى فى ثلاث مجاهيل x , y ,Z.

I- معادلات الدرجة الأولى فى مجهول واحد x:

نعتبر المعادلات الآتية:

$$(1)\ \frac{5x}{2} = 0$$

$$(2)\ x + 7 = 4$$

$$(3)\ 2x + 5 = o$$

$$(4)\ 2x = 8$$

$$(5)\ \frac{2}{x} = \frac{1}{x}$$

وكلها معادلات تحتوى على مجهول واحد x ومن الدرجة الأولى لأنها مرفوعة للأس واحد وحل هذه المعادلات يكتب على هيئة مجموعات كالآتى:

(1) $\frac{5\,x}{2} = o$

بضرب طرفى المعادلة $x\ \frac{2}{5}$

$$\frac{2}{5}\left(\frac{5x}{2}\right) = 0$$

$x = 0$

مجموعة الحل لهذه المعادلة هى:

$x = \{0\}$

(2) $x + 7 = 4$

بجمع 7- للطرفين:

$$x - 7 + 7 = 4 - 7$$
$$x = -3$$

∴ مجموعة الحل لهذه المعادلة هى :-

$x = \{-3\}$

(3) $2\,x + 5 = 0$

بجمع 5- للطرفين

$$-5 + 2\,x + 5 = -5$$
$$2\,x = -5$$

ضرب الطرفين $x\ \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(-5)$$

$$x = -\frac{5}{2}$$

∴ مجموعة الحل لهذه المعادلة هى:

$x = \left\{-\frac{5}{2}\right\}$

(4) $2x = 8$

بضرب الطرفين $\frac{1}{2}$ x

$\frac{1}{2}(2x) = \frac{1}{2}(8)$

$x = 4$

∴ مجموعة الحل لهذه المعادلة هى :-

$x = \{4\}$

نلاحظ أن حل هذه المعادلات تم باستخدام خاصيتى الجمع والضرب بعدد لا يساوى صفرا. حيث تحولت المعادلة الخطية إلى معادلة مكافئة:

(5) $\frac{2}{x} = \frac{1}{x}$

بضرب طرفى المعادلة X x^2

$x^2\left(\frac{2}{x}\right) = x^2\left(\frac{1}{x}\right)$

$2x = x$

$2x - x = o$

$x = 0$

وبالتعويض عن المعادلة الأصلية عن قيمة x

$\therefore \frac{2}{0} = \frac{1}{0}$

وهذه الكميات $\left(\frac{2}{0}, \frac{1}{0}\right)$ كميات غير معرفة وبالتالى لا تتساوى فمن

المستحيل أن تتساوى الكميات الغير مُعرَّفة وبالتالى فإن $x = 0$ يعتبر حل مرفوض للمعادلة.

وعلى ذلك فإن المعادلتين:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{x} \qquad , \quad x = 0$$

غير متكافئتين وبالتالى لا يوجد حل للمعادلة الأصلية. ويقال فى هذه الحالة أن مجموعة الحل هي المجموعة الخالية ϕ وتكتب :

$x = \phi$

ومثال آخر للمعادلتين الغير متكافئتين هو :

(6) $\quad x^2 = 4$

$\qquad x = -2$

تعتبرا معادلتين غير متكافئتين لأن مجموعة الحل للمعادلة الأولى هي:

$x = \{-2, 2\}$

، مجموعة الحل للمعادلة الثانية هي:

$x = \{-2\}$

وهما غير متساويتان وبالتالى نستطيع أن نصل إلى هذه القاعدة:-

المعادلات التى لها نفس مجموعة الحلول تسمى معادلات متكافئة والتى تختلف فيها مجموعة الحلول تسمى معادلات غير متكافئة.

أمثلة متنوعة :

مثال 7 :

حل المعادلة الآتية :

$$\frac{2x}{3} = 5 - \frac{x}{2}$$

الحـــل :

المضاعف المشترك البسيط هو 6

بضرب طرفى المعادلة X 6

$$\therefore 6\left(\frac{2x}{3}\right) = 6\left(5 - \frac{x}{2}\right)$$

$$4x = 30 - 3x$$

بجمع x 3 + للطرفين

$$3x + 4x = 30 - 3x + 3x$$

$$7x = 30$$

بضرب طرفى المعادله $X \ \frac{1}{7}$

$$\frac{1}{7}(7x) = \frac{1}{7}(30)$$

$$x = \frac{30}{7}$$

∴ مجموعة الحل هي :

$$x = \left\{\frac{30}{7}\right\}$$

مثال 8 :

أوجد قيمة x فى المعادلة الآتية:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{3}{4x} = \frac{1}{2}$$

الحل:

المضاعف المشترك البسيط للمقامات هو 12 x

∴ بضرب طرفى المعادله $12\,x \quad X$

$$\therefore 12\,x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\right)=12\,x\left(\frac{3}{4x}+\frac{1}{2}\right)$$

$$12+4\,x = 9+6\,x$$

$$-4+12+4\,x=-4x+9+6x$$

$$12 = 9+2x$$

$$-9+12=-9+9+2x$$

$$3=2\,x$$

بضرب طرفى المعادله $\frac{1}{2} \quad X$

$$\frac{1}{2}(3)=\frac{1}{2}(2x)$$

$$x=\frac{3}{2}$$

∴ مجموعة الحل هى :

$$x=\left\{\frac{3}{2}\right\}$$

مثال 9 :

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$\frac{1}{x-4}-\frac{5}{x+4}=\frac{8}{x^2-16}$$

الحل:

بضرب طرفى المعادلة $X\ (x^2 - 16)$

$$(x^2 - 16)\left[\frac{1}{x - 4} - \frac{5}{x + 4}\right] = (x^2 - 16)\,\frac{8}{x^2 - 16}$$

$$x + 4 - 5\,(x - 4) = 8$$

$$x + 4 - 5x + 20 = 8$$

$$-4x + 24 = 8$$

$$-4 \;= -16$$

$$\therefore\ x = \frac{-16}{-4} = 4$$

وبالتعويض عن قيمة $x = 4$ فى المعادلة الأصلية

$$\therefore \frac{1}{4 - 4} - \frac{5}{4 + 4} = \frac{8}{16 - 16}$$

$$\frac{1}{0} - \frac{5}{8} = \frac{8}{0}$$

وبما أن القسمه على صفر غير معرفة وبالتالى $x = 4$ حل مرفوض للمعادلة.

$\therefore$ مجموعة الحل للمعادلة هى:

$$x = \phi$$

تمارين (4)

1- أى زوج من المعادلات الآتية متكافئة:

1) $2x - 3 = 5$ ، $2x = 8$

2) $y = -2$ ، $y^2 = 4$

3) $\frac{2}{x} = \frac{7}{x}$ ، $2x = 7x$

4) $3x - 2 = 5$ ، $7x + \frac{2}{3} = 17$

II- أوجد مجموعة حلول المعادلات الآتية:

1- $4x + 3 = 11$

2- $3x - 2 = 7$

3- $2y - 5 = 7 - 3y$

4- $\frac{2}{x} - 3 = \frac{5}{x}$

5- $2(3x - 4) = 5(1 - 3x) + 8$

6- $\frac{1}{3} - 2x = -x + \frac{2}{3}$

7- $\frac{2 - 3x}{4} - \frac{1 - 3x}{6} = \frac{1}{12} + \frac{x - 2}{3}$

8- $\frac{2}{x - 1} = \frac{3}{x + 1}$

9- $\frac{x}{x - 2} = -\frac{2}{3}$

10- $\frac{1}{3 - x} + \frac{7}{2x + 3} = 0$

II- المعادلتين الآنيتين:

هما معادلتين من الدرجة الأولى فى مجهولين ويتم التعامل معهما فى آن

واحد لإيجاد قيمة كل مجهول على حده.

فكر الحل:

يتم توحيد معاملات المجهول الأول وباستخدام خواص المعادلات (الجمع والطرح) يمكن إيجاد قيمة المجهول الثانى والعكس صحيح.

مثال 1 :

حل المعادلتين الآتيتين: -

$4x + 5y = 3 \qquad (1)$

$x + y = 1 \qquad (2)$

الحل :

لايجاد قيمة x يتم ضرب المعادلة (2) x 5 وتبقى المعادله (1)كما هى :

$4x + 5y = 3 \qquad (1)$

$5x + 5y = 5 \qquad (3)$

بطرح المعادلتين (1) من (3)

$\therefore x + 0 = 2 \qquad (4)$

لايجاد قيمة y يتم ضرب المعادلة (2) x 4 وتبقى المعادلة (1) كما هى :

$4x + 5y = 3 \qquad (1)$

$4x + 4y = 4 \qquad (5)$

بطرح المعادلتين (5) من (1).

$\therefore y = -1$

$\therefore x = 2$

$y = -1$

والطريقة العامة التى تكتب بها المعادلات السابقة:-

$a_1 x + b_1 y = c_1 \qquad (1)$

$a_2 x + b_2 y = c_2 \qquad (2)$

بضرب المعادله (2) $b_1 \times$

، المعادلة $b_2 \times (1)$

$\therefore a_1 b_2 x + b_2 b_1 = c_1 b_2$

$a_2 b_1 x + b_2 b_1 y = c_2 b_1$

بطرح المعادلتين (نلاحظ أن معاملات y واحدة فى المعادلتين)

$\therefore x (a_1 b_2 - a_2 b_1) = c_1 b_2 - c_2 - b_1$

$$\therefore x = \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{(a_1 b_2 - a_2 b_1)} \qquad (6)$$

بضرب المعادلة (2) $a_1 X$

والمعادلة (1) $a_2 X$

$$a_1 a_2 x + b_1 a_2 y = c_1 a_2 \qquad (7)$$

$$a_2 a_1 x + a_1 b_2 y = c_2 a_1 \qquad (8)$$

بطرح المعادلتين (نلاحظ أن معاملات x واحدة فى المعادلتين)

$\therefore y (a_1 b_2 - a_2 b_1) = a_1 c_2 - a_2 c_1$

$$\therefore y = \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad (9)$$

بشرط أن $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$ فتكونا قيمتى x , y هما المعادلتين 6 , 9

فإذا وضعنا المعادلتين (1) ,(2) فى صورة مصفوفة :-

$$A = \begin{bmatrix} b_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

نجد أن محدد المصفوفة Δ A يساوى :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1\ b_2 - a_2\ b_1$$

فلايجاد قيمة Δx نقوم بإلغاء معاملى x (a_1 , a_2) ،نكتب بدلا لهما c_1 ,

c_2كالآتى:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1\ b_2 - b_1\ c_2$$

ولإيجاد قيمة Δy نقوم بإلغاء معاملى y (b_1 , b_2) ونكتب بدلا لهما c_1

c_2 , كالآتى:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1\ c_2 - c_1\ a_2$$

$$\therefore x = \frac{\Delta\ x}{\Delta} = \frac{c_1\ b_2 - b_1\ c_2}{a_1\ b_2 - b_1\ a_2}$$

$$, y = \frac{\Delta\ x}{y} = \frac{a_1\ c_2 - c_1\ a_2}{a_1\ b_2 - b_1\ a_2}$$

ولحل المثال السابق بواسطة المحددات نجد أن:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\ (1) - 5\ (1) = -1$$

$$\Delta\ x = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\ (1) - 5\ (1) = -2$$

$$\Delta\ y = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\ (1) - 3\ (1) = 1$$

$$\therefore x = \frac{\Delta\ x}{\Delta} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-1}{-1}=-1$$

II المعادلات الخطية فى ثلاث مجاهيل x , y , z :

بنفس الطريقة السابقة يمكن حل المعادلات الخطية فى ثلاث مجاهيل بمعلومية ثلاث معادلات مستقلة

$$a_{11}\,x+\ a_{12}\,y+a_{13}\,z=c_1$$

$$a_{21}\,x+\ a_{22}\,y+a_{23}\,z=c_2$$

$$a_{31}\,x+\ a_{32}\,y+a_{33}\,z=c_3$$

وقد وجد أن مفكوك المحدد هو:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}\left[(a_{22}.\,a_{33})-(a_{32}.a_{23})\right]-a_{21}\left[(a_{12}.a_{33}-a_{32}.a_{13})\right]$$

$$+\,a_{31}\left[(a_{12}.\,a_{23})-(a_{22}.a_{13})\right]$$

قاعدة كريمر:

تستخدم قاعدة كريمر فى حل هذا النوع من المعادلات حتى رتبة n من المعادلات فى n من المجاهيل ونصها كالآتى:

إذا كان المحدد Δ لمعاملات النظام الخطى المكون من المعادلات بـ n من المتغيرات يختلف عن الصفر، فالنظام الخطى حل واحد فقط يمكن التعبير فيه عن قيمة كل مجهول لكسر مقامه هو المحدد Δ وبسطه محدد نحصل عليه من المحدد Δ باستبدال العمود المكون من معاملات ذلك المجهول بالأعداد:

$c_1 , c_2 , c_3 \quad , c_n$

وسوف نستخدم فى دراستنا هنا ثلثا مجاهيل z , y , x

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{12} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{12} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{23} & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

والمحدد الثنائى لـ a_{11} يسمى محيدد ويرمز له بالرمز $\Delta 11$

والمحدد الثنائى لـ a_{21} يسمى محيدد ويرمز له بالرمز $\Delta 21$

والمحدد الثنائى لـ a_{31} يسمى محيدد ويرمز له بالرمز $\Delta 31$

وفى الحالة العامه فإن المحدد Δij مرافق للعنصر aij وإشارته تكون:

سالبه إذا كان $j + i$ عدداً فرديا

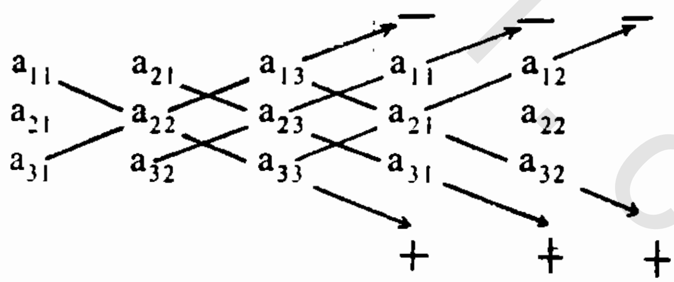
موجبه إذا كان $j + i$ عدداً موجبا

ويمكن فك المحدد السابق بالطريقة التاليه حيث الاسهم العليا تكون حاصل ضرب الثلاث عناصر مع عكس إشارتها والاسهم السفلى حاصل الضرب بنفس الاشارة بعد تكرار العمود الأول والعمود الثانى.

وتسمى هذه الطريقة بطريقة سارس لفك محدد المرتبه الثالثه وهو كما بشكل (17) يكون قيمة المحدد Δ هى:

$$\Delta = (a_{11} . a_{22} . a_{33}) + (a_{12} . a_{23} . a_{31}) + (a_{13} . a_{21} . a_{32})$$

$$- (a_{12} . a_{21} . a_{31}) - (a_{11} . a_{23} . a_{32}) - (a_{13} . a_{22} . a_{31})$$



شكل 17

مثال 1 :

استخدم قاعدة كريمرلحل المعادلات الآتية:

$4x + 5y + z = 6$
$x + y + 2z = 7$
$2x - y + 3z = 14$

الحــل:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4[(1(3) - (-1(2))] -1\ [(5(3)-(-1)(1)]$$

$$+ 2\,[(5(2) - (1)\,(1))]$$

$$= 20 - 16 + 18 = 22$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \\ 14 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} -7\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 6\,(-5)\ \ -7\,(-16) + 2\,(-9)$$
$$= 44$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 14 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 14 & 3 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 4\,(7) -1\,(-4) + 2\,(-5)$$
$$= -22$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 14 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} -1\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 14 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 4\,(-21) - 1\,(-76) + 2\,(-29)$$

$$= 66$$

$$\therefore x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{44}{22} = 2$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-22}{22} = -1$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3$$

مثال 2:

أوجد حل المثال السابق بطريقة سارس لفك محدد الرتبة الثالثة:

الحل :

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right.$$

$$= -2 + 8 - 15 + 12 + 20 - 1 = 22$$

$$\Delta x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 7 & 1 & 2 & 7 & 1 \\ 14 & -1 & 3 & 14 & -1 \end{array}\right.$$

$$= -14 + 12 - 105 + 18 + 140 - 1 = 44$$

$$\Delta\ y = \left|\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 2 \\ 2 & 14 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 4 & 6 \\ 1 & 7 \\ 2 & 14 \end{array}$$

$$= -14 - 112 - 18 + 84 + 24 + 14 = -22$$

$$\Delta\ z = \left|\begin{array}{ccc} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 14 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 4 & 5 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}$$

$$= -12 + 28 - 70 + 56 + 70 - 6 = 66$$

$$x = \frac{\Delta\ x}{\Delta} = \frac{44}{22} = 2$$

$$y = \frac{\Delta\ y}{\Delta} = \frac{-22}{22} = -1$$

$$z = \frac{\Delta\ z}{\Delta} = \frac{66}{22} = 3$$

تمارين (5)

أوجد حل منظومة المعادلات الآتية باستخدام قاعدة كريمر:

1-
$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ x - y + z &= 1 \\ x + y - z &= 0 \end{aligned}$$

2-
$$\begin{aligned} 3x - y + z &= 0 \\ -x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 4z &= -2 \end{aligned}$$

3-
$$\begin{aligned} x - y + 2z &= -5 \\ -2x + y + z &= 4 \\ 3x - 4z + 2 &= 0 \end{aligned}$$

4-
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

5-
$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 11 \\ -x_1 + x_2 - x_3 &= -4 \end{aligned}$$

6-
$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 1 \\ x + z &= -2 \\ x - 3y &= 3 \end{aligned}$$

خواص المحددات :

الخاصية الأولى:

لا تتغير قيمة المحدد إذا تبادل الوضع بين الصفوف والأعمدة:

Ex:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A` = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

وبفك المصفوفة بالنسبة إلى العمود الأول وإيجاد قيمة محددها.

$$|A| = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\ \Delta_{31} \quad (1)$$

وبإيجاد قيمة محدد المصفوفة $A`$

$$|A`| = a_{11}\Delta_{11} - a_{21}\Delta_{21} + a_{31}\ \Delta_{31} \quad (2)$$

من (1) , (2) ينتج أن :-

$$A = A`$$

الخاصية الثانية:

إذا كان أحد الأعمدة أو أحد الصفوف مؤلفا من عناصر كلها أصفار فإن المقادير الستة كل منها في حاصل ضرب عناصرها على الصفر، بالتالي يكون المحدد مساويا للصفر.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\ \Delta_{11} - a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\ \Delta_{13}$$

$$= (a_{11}\ a_{22}\ a_{33}) - a_{11}\ a_{32}\ a_{23}) - (a_{12}\ a_{21}\ a_{33})$$

$$+ (a_{12}\ a_{31}\ a_{23}) + (a_{13}\ a_{21}\ a_{32}) - (a_{13}\ a_{31}\ a_{22})$$

وبالنظر للمفكوك نجد أن يتكون المجموع الجبرى لستة مقادير كل مقدار منها هو عبارة عن حاصل ضرب ثلاثة عناصر من المحدد.

نجد أن كل مقدار يتكون من عناصر مأخوذه من الصفوف الثلاثة والأعمدة الثلاثة التى يتكون منها المحدد. وبالتالى إذا كان أحد الأعمدة أو أحد الصفوف مؤلفا من عناصر كلها أصفار فإن المقادير الستة تحتوى كل منها فى حاصل ضرب عناصرها على الصفر. ولذلك يكون المحدد مساويا للصفر.

Ex (1) $$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} +2\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\ (0) + 1\ (0) \quad +2\ (0) \quad =0$$

Ex (2) $$\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 5 \\ x+y & -3x+15 & y+5 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

فأوجد قيمة x , y

$\therefore \quad |A| = 0$

$\therefore \quad x + y = 0 \qquad (1)$

$, \quad y + 5 = 0 \qquad (2)$

$, \quad -3x + 15 = 0 \qquad (3)$

من (2) : $y = -5$

من (3) : $x = 5$

وهذا يحقق المعادلة (1) : -

$x + y = 0$

$5 + (-5) = 0$

الخاصية الثالثة:

تتغير إشارة المحدد إذا تبادل الوضع صفان. وتتغير إشارة المحدد إذا تبادل الوضع عمودان.

فإذا كان :

$$A_1 = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}$$

،

$$A_2 = \begin{bmatrix} M_1 & M_3 & M_2 \\ N_1 & N_3 & N_2 \\ R_1 & R_3 & R_2 \end{bmatrix}$$

$\therefore A_1 = -A_2$

على الطالب إثبات هذه الخاصية عن طريق فك المحددين

الخاصية الرابعة :

إذا ضربت عناصر صف واحد فقط أو عناصر عمود واحد فقط من مصفوفة مربعة بعدد فإنه يجب ضرب محددها السابق فى هذا العدد.

فإذا كان :

$$A_1=\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{bmatrix}$$

,

$$A_2=\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & KM_3 \\ N_1 & N_2 & KN_3 \\ R_1 & R_2 & KR_3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore |A_2| = K\,|A_1|$$

الإثبات:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

بالنسبة للعمود الأخير

$$\therefore |A_1| = a_{13}\Delta_{13} - a_{25}\,\Delta_{23} + a_{33}\,\Delta_{33}$$

وبضرب أى صف أو أى عمود k X

$$|A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & k\,a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_2| = k\, a_{13}\, \Delta_{13} - k\, a_{23}\, \Delta_{23} + k\, a_{33}\, \Delta_{33}$$
$$= k\, (a_{13}\, \Delta_{13} - a_{23}\, \Delta_{23} + a_{33}\, \Delta_{33}) = k\, |A_1|$$

الخاصية الخامسة:

تكون قيمة المحدد مساوية للصفر إذا وجد فيه صفان متساويان أو عمودان متساويان.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ويفرض أن عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثانى

$a_{11} = a_{21}$, $a_{12} = a_{22}$, $a_{13} = a_{23}$

ويفك المحدد ينتج المطلوب.

الخاصية السادسة:

إذا كانت فى المحدد النسبة بين العناصر المتناظرة فى أي صفين أو أي عمودين مقدارا ثابتا فإن قيمة هذا المحدد = صفر.

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

ويفرض أن :-

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = k$$

فإن هذا المحدد = صفر

الاثبات :

$$a_{11} = k\,a_{21} \quad , \quad a_{12} = ka_{22} \quad , \quad a_{13} = ka_{23}$$

وبالتعويض نجد أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= k \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= k\,(0)$$

$$= 0$$

الخاصية السابعة :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فإذا كان:

$$a_{11} = x_1 + x_2 + x_3$$

$$a_{12} = y_1 + y_2 + y_3$$

$$a_{13} = z_1 = z_2 + z_2$$

$$\therefore |A| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

الخاصية الثامنة:

إذا كان :

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

واستخدمت التحويله:

$$i_2 = ki_1 + i_2$$

$$\therefore |A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} + a_{21} & ka_{12} + a_{22} & ka_{13} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

وبالمثل :

$$j_2 = kJ_1 + J_2$$

حيث $i \equiv$ الصف ، $J \equiv$ العمود

أمثلـــة متنوعة :

مثـــــال 1 :

إذا كان :-

$$A = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 2 & 4 & 8 \\ -3 & 9 & -27 \end{vmatrix} = 0$$

أوجد قيمة x

الحل :

∵ المحدد = 0

∴ الاحتمال الأول 0 = i_1 (جميع عناصر الصف الأول = 0)

$\therefore\ x = 0 \quad , \quad x^2 = 0 \quad . \quad x^3 = 0$

الاحتمال الثانى هو أن:-

عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثانى

$\therefore\ x = 2 \quad , \quad x^2 = 4 \quad . \quad x = 8 \ \rightarrow x = 2$

الاحتمال الثالث هو أن:

عناصر الصف الأول = عناصر الصف الثالث

$\therefore\ x = -3 \quad , \quad x^2 = 9 \quad . \quad x^3 = -27 \quad \rightarrow x = -3$

. قيم x التى تجعل المحدد = 0 هى :

$x = \{ 0 , 2, -3 \}$

مثـــال :

أوجد قيمة محدد المصفوفة :

$$= \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

الحـــل:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+1 & 2+1 & 3+1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0$$

تمارين (6)

1- أوجد قيم المحددات الآتية:

$$a-\begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 \\ -7 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad b-\begin{vmatrix} 4 & 6 & 7 \\ 5 & 10 & 40 \\ -6 & 9 & 13 \end{vmatrix}$$

$$c-\begin{vmatrix} -4 & 2 & 3 \\ -7 & -8 & 6 \\ 15 & 11 & 9 \end{vmatrix} \qquad d-\begin{vmatrix} -8 & -12 & 0 & -2 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ -4 & -6 & 0 & -1 \\ 5 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2- إثبت أن :

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)\ (b-c)\ (c-a)$$

3- إثبت أن :

$$\begin{vmatrix} a+b+2c & a & b \\ c & b+c+2a & b \\ c & a & c+a+2b \end{vmatrix} = 2(a+b+c)^3$$

4 - إثبت أن :

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a \\ b & c+a & b \\ c & c & a+b \end{vmatrix} = 4a\ bc$$

5- إثبت أن معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $Q\ (x_2\ ,\ y_2)$, $P(x_1\ ,\ y_1)$ هي:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

6- استخدم المسألة السابقة لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقاط:

a) p (3, 4) , Q (-2, 7)

b) p (1, -5) , Q(3, -8

7- أوجد قيمة x التى تجعل المحدد = 0 فى كل من :

a) $$\begin{vmatrix} x & x^2-1 & 2x \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

b) $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \\ x & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

8- أوجد الشروط الواجب توافرها فى الثلاث نقاط:

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$

حتى تقع على خط مستقيم.

9- إستخدم نتيجة المسأله (8) لإثبات أن :

P (3, 5), Q (1, 1), R (-2, -5)

تقع على إستقامة واحدة

ثانيا: معادلات الدرجة الثانية في مجهول واحد:

يوجد ثلاث طرق على الترتيب نوجزها فيما يلي:-

I- طريقة التحليل إلى عوامل (التحليل إلى أقواس):

مثال 1 :

أوجد حل المعادلة الآتية :

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

الحـــل :

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$
$$(x + 1)(x + 2) = 0$$

$\therefore$ حاصل ضرب قوسين = 0

$$\therefore (x + 1) = 0$$
$$x = -1$$
$$, \quad (x + 2) = 0$$
$$\therefore x = -2$$

مثال 2 :

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$

الحل:

$$x^2 - 7x + 10 = 0$$
$$(x - 2)(x - 5) = 0$$
$$\therefore x - 2 = 0$$
$$\therefore x = 2$$
$$, \quad x - 5 = 0$$
$$\therefore \quad = 5$$

II طريقة إكمال المربع:

فى حالة عدم إمكانية الحل بالطريقة السابقة يتم تحويل المعادلة إلى معادلة مكافئة على الصورة $(x+a)^2 = b$

حيث b , a ثوابت

مثال 3 :

أوجد حل المعادلة:

$$x^2 + 6x + 1 = 0$$

الحل :

نضع المعادلة على الصورة :

$$x^2 + 6x = -1$$

لإكمال المربع يتم إضافة الحد الأخير فى الطرف الأيسر وأيضا فى الطرف الأيمن لتبقى المعادلة كما هى.

الحد الأخير = مربع نصف معامل x = $\left(\frac{\text{معامل } x}{٢}\right)^2$

$$9 = \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

∴ يضاف العدد 9 لكلا الطرفين بهذه الصورة:

$$x^2 + 6x + 9 = -1 + 9$$

$$(x+3)^2 = 8$$

$$\therefore x + 3 = \pm\sqrt{8}$$

$$\therefore x = -3 + \sqrt{8}$$

$$, \quad x = -3 - \sqrt{8}$$

ملحوظـــــة :

جميع معادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد لها حلين.

III- طريقة القانون العام :

إذا تعـذر الحل بالطريقـتـين السابقـتـين يتم اسـتـخـدام القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية فى مجهول واحد. حيث توضع المعادلة على الصورة الآتية:

$$ax^2 + b\,x + c = 0$$

a ، b ، c ثوابت ، $a \neq 0$

ويستخدم القانون الآتى لإيجاد جذرى x (قيمتى x):-

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ويرمز بالمقدر تحت الجذر $b^2 - 4ac$ بالرمز Δ هو مميز المعادلة وتتوقف نوعية جذور المعادلة على إشارة هذا المميز فإذا كان :

1) $\Delta > 0$

يكونا الجذران حقيقيان ومختلفان

2) $\Delta = 0$

يكون الجذران حقيقيان ومتساويان

3) $\Delta < 0$

يكون الجذران تخيلان

ويفرض أن جذور المعادله هما I , m (أى قيمتىx) فإن :

$$l + m = \frac{-b}{a}$$

$$lm = \frac{c}{a}$$

يمكن كتابة المعادلة على الصورة :

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 - (l + m)x + lm = 0$$

مثال 4:

أوجد حل المعادلة الآتية:

$$2x^2 + 5x + 1 = 0$$

الحل:

$$a = 2 \ , \ b = 5 \ , \ c=1$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2\,(2)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4\,(2)\,(1)}}{2\,(2)}$$

$\therefore$ مجموعة الحل هى :

$$\left\{ \frac{-5 + \sqrt{17}}{4} \ , \ \frac{-5 - \sqrt{17}}{4} \right\}$$

تمارين (7)

أوجد حل المعادلات الآتية:

1- $\dfrac{x - 1}{x + 1} + \dfrac{x + 1}{x - 1} =$

2- $x^3 - x^2 - 12x = 0$

3- $x^2 + 1 = 8x$

4- $3x^2 - 5x + 1 = 0$

5- $1 - \dfrac{1}{9}x^2 = 0$

6- $4x^2 + 12x + 9 = 0$

7- $\dfrac{2x - 1}{x} + 1 = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

8- $x^2 + 6x + 4 = 0$

9- $3x^2\ 2x + 5 = 2x + 3$

10- $\dfrac{2x - 1}{x} + 1 = \dfrac{1}{x + 2}$

11- $x(x+6)+11=-2(2x+5)$

12- $x^3+6x+5 = 0$

13- $\frac{x}{x-2}-\frac{1}{x+2}=2$

14- $x^3-1 = 0$

15- $2x^2+3x+6 = 0$

16- $\frac{1+x}{1-x}+\frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{1-x^2}$

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات الآتيه (مجموعة الحل الحقيقية):-

1- $x^3-3x^2-6x-8=0$

2- $2x^3+5x^2-2x-5=0$

3- $x^3 = 1$

4- $x^3 = -1$

5- $x^3 = 8$

6 - $x^3 = 64$

الأســس :

أولا: الأســس الصـحيـحة:

إذا كانت x عدد حقيقى ، n , m عدد صحيح فإنه يمكن إستخدام التعريف الآتى:

$x^n = x.\ x.\ x.\ \ldots\ldots\ldots\ x$

حيث مكررة لعدد n من المرات. وتسمى x أساس القوة، n تسمى الأسس.

فمثلا

$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

كما يمكن وضع قوانين الأسس الآتية والتى يمكن إستنتاجها من التعريف السابق.

1- $x^n . x^m = x^{n+m}$

2- $(x. y)^n = x^n . y^n$

3- $(x^n)^m = x^{n.m}$

4- $$\frac{x^m}{x^n} = \begin{cases} x^{m-n} & m > n \\ 1 & m = n \\ \dfrac{1}{x^{n-m}} & m < n \end{cases}$$

5- $(\frac{y}{x})^n = \frac{y^n}{x^n} \quad , x \neq 0$

أمثلة عددية :

1- $3^2 \;.\; 3^3 = 3^5$

2- $(\sqrt{3})^5 \;.\; (\sqrt{3})^{-3} = (\sqrt{\ })^{5-3} = (\sqrt{3})^2 = 3$

3- $((2).(7))^3 = (2)^3.(7)^3$

4- $(2^3)^2 = 2^{3x2} = 2^6$

فإذا اتم وضع $m = 0$ فى القوانين السابقة نجد أن القانون رقم (1) بعدالتعويض فيه يصبح :

$$x^n \;.\; x^0 = x^n$$

$$x^0 = \frac{x^2}{x^n} = 1 \;,\quad x \neq 0$$

أما فى حالة إستخدام الأس السالب. فيكون بفرض أن $m = -n$ فى القانون رقم (1) الذى يصبح :

$$x^n \;.\; x^{-n} = x^{n=n} = x^0 = 1$$

$$\therefore\; x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

وعلى ذلك يمكننا الآن تعميم القوانين السابقة ليكون الأس موجبا أو صفرا أو سالبا (فى القوانين الأسية الخمسة) إذا عرفنا أن:-

1- $x^0 = 1$

2 - $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

مع الوضع فى الاعتبار أن (0^0) كمية غير معرفة.

ويمكن أيضا استنتاج القواعد الآتيه:

$$\text{I} \qquad x^a \cdot x^b \cdot x^c = x^{a+b+c}$$

$$\text{II} \qquad \frac{x^a \cdot x^b \cdot x^c}{x^L \cdot x^m \cdot x^n} = x^{a+b+c-L-m-n}$$

$$\text{III} \qquad \left(\frac{a \times b \times c}{x \times L \times y}\right)^n = \frac{a^n \cdot b^n \cdot c^n}{x^n \cdot L^n \cdot y^n}$$

أمثلة :

$$1- \quad x^{-3} = \frac{1}{x^3}$$

$$\therefore 3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

$$2- \frac{3^5 \cdot 3^{-2} \cdot 3^7}{3^9 \cdot 3^{-6} \cdot 3^{-4}} = 3^{5-2+7-9+6+4} = 3^3 = 27$$

ثانيا : الأسس الكسرية:

إذا كانت x عددا حقيقيا موجبا:

1- وكانت n عدد صحيح > 1 فإن :

$$L = (x)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

وتسمى L الجذر النونى للعدد x

2 - وكانت m, n أعداد صحيحة فإن:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

أمثلة :

$$1- \qquad 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad , \qquad 5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5}$$

2- $(9)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$

3- $(8)^{\frac{-2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = (\sqrt[3]{8})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$

ملحوظة :

$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n.L]{x^{m.L}}$

أى أن إذا ضرب كل من دليل الجذر والأس المرفوع فوق x فى نفس العدد

L في نفس العدد L لا يغير من قيمة العدد. فمثلا :-

$\sqrt[3]{5^4} = \sqrt[6]{5^8}$

تمار‍يـــــن (8)

١- ضع الآتى فى أبسـط صورة :

(a) $2a^3 . a^{-5}$

(b) $a^{m+n} . a^{m-n}$

(c) $3a^{-3} . 2a^{-2}$

(d) $\dfrac{a^2 b^4 c^3}{a b^2 c^2}$

(e) $\dfrac{a^8 . a^4}{a^3 . a^5}$

(f) $\dfrac{12a^6 . 3a^{-3}}{4a^{-4} . 5a^2}$

(g) $(21)^3 + (14)^2$

(h) $(32)^{\frac{2}{5}} . 8^{\frac{2}{3}}$

(k) $\dfrac{(2^5 \; 3^5 \; 8^5)^6 . (24)^3}{(48)^{28}}$

(l) $\dfrac{(25)^{x-3} . 3^{x+3}}{125^{x-4} \; 15^{6-4} \; 9^{x-1}}$

2 - إثبت أن :

(a) $\dfrac{4^{3x-1} . 9^{2x} . (0.5)^3}{6^{4x-2} \sqrt[3]{8^{2x-5}}} = 36$

(b) $\dfrac{8^{x-\frac{1}{3}} . 3^{x+3}}{16^{x-1} . 6^{5-x} . 9^{x-1}} = \dfrac{1}{4}$

المتباينـــــات

تعريـــــف :

لكل عددين حقيقين a , b نقول أن a أكبر من b وتكتب $(a > b)$ إذا كـان وفقط إذا كان $a - b$ موجبا ونقول أن a أصغر من b وتكتب $(a < b)$ إذا كـان وفـقط إذا كان $a - b$ سالبا.

ويراها الدارس على شكل علاقـة بين متـغـيـر (أو أكـثـر) وثابت (أو عـدة ثوابت) - كالمعادلة - مع تبديل علامة = الموجودة فى المعادلة بعلامة من علامات المتباينة.

علامات المتباينة:

$>$ أكبر من $\geq$ أكبر من أو يساوى

$<$ أصغر من $\leq$ أصغر من أو يساوى

فمثلا $9 > 5$ تقرأ 9 أكبر من 5.

الخواص الهامة للمتباينات:

1- لكل زوج من الأعداد الحقيقية a , b إحدى العلامات الآتية:-

(1) $a > b$ (2) $a = b$ (3) $a < b$

2 - إذا كان $a > b$ ، $b > c$ فإن $a > c$.

3 - إذا كان $a > b$ فإن $a + c > b + c$.

4- إذا كان $a > b$, $c > 0$ فإن $ac > bc$.

5- إذا كان $a > b$, $c < 0$ فإن $ac < bc$.

وسوف نثبت الخاصية رقم (4) وبنفس الطريقة يمكن إثبات بقية الخواص.

برهان الخاصية رقم (4):

نفرض أن a, b, c أعداد حقيقيه

وأن $a > b$, $c > 0$

$\therefore a - b > 0$

و $\therefore$ حاصل ضرب عددين موجبين $(a-b)$, c عددا موجبا.

$\therefore (a- b)\ c > 0$

$\therefore ac > bc$ حسب قانون التوزيع

المتباينة الخطية فى مجهود واحد:

تعلمنا كيف نحل معادله خطيه فى مجهول واحد وسوف نستخدم نفس الأسلوب فى حل المتباينة الخطية والتى تبينها الدراسة الآتية:

نعرف أن $9 > 5$

فعند إضافة أى عدد موجب وليكن 2 لكلا الطرفين

$2 + 9 \overset{?}{>} 2 + 5$

$11 > 7$

أى العدد 11 أكبر من العدد 7.

حيث تعنى العلامة $\overset{?}{>}$ هل وضع العلامة فى هذه الحالة صحيح وعند إضافة

أى عدد سالب وليكن 2- لكلا الطرفين.

$-2 + 9 \overset{?}{>} -2 + 5$

$7 > 3$

والمتباينة فى هذه الحالة أيضا صحيحة وعلى ذلك يمكننا أن نستنتج أن :

إضافة أى عدد موجب أو سالب لا يغير إتجاه المتباينة.

مثال 1:

أوجد حل المتباينة:

$x - 10 \geq 2$

الحل :

بإضافة 10 + لكلا الطرفين.

$x - 10 + 10 \geq 2 + 10$

$x \geq 12$

مجموعة الحل هى:

$\{x : x \geq 12\}$

مثال 2:

أوجد حل المتباينة الآتية:

$x + 6 > -8$

الحل :

بإضافة 6- لكلا الطرفين

$x + 6 - 6 > -8 - 6$

$x > -14$

مجموعة الحل هى:-

$\{x : x > -14\}$

مثال 3

أوجد حل المتباينه الأتيه في صورة فتره ثم كتابه الحل في صورة مجموعة وتوضيح الحل على خط الأعداد

$x + 8 > 3$

الحل

بإضافة 8- لكلا الطرفين

$x + 8 - 8 > 3 - 8$
$x > -5$

الحل فى صورة فترة :-

$(-5 , \infty)$

مجموعة الحل هى:

$\{ x : \quad x > -5 \}$

تمثيل الحل على خط الأعداد كما هو موضح بشكل 18

شكل 18

ولحل المتباينات من الدرجة الأولى يجب معرفة الحالتين الآتيتين:

1- الحالة الأولي:

إذا ضربنا أو قسمنا طرفى المتباينة فى أو على كمية موجبة :

فمثلا $14 > 6$

أ - إذا ضربنا كلا الطرفين X 2 +

$14 \times 2 > 6 \times 2$
$28 > 12$

تظل المتباينة فى نفس الاتجاه.

ب - إذا قسمنا كلا الطرفين ÷ 2 +

$14 \div 2 \overset{?}{>} 6 \div 2$

$7 > 3$

تظل المتباينة فى نفس الاتجاه.

2- الحالة الثانية:

إذا ضربنا أو قسمنا طرفى المتباينة فى أو على كمية سالبة:

أ-إذا ضربن كلا الطرفين X 2-

$14 \text{ X } -2 \overset{?}{>} 6 \text{ X } -2$

$-28 < -12$

تم عكس إتجاه المتباينة حتى تكون المتباينه صحيحة.

ب- إذا قسمنا كلا الطرفين ÷ 2-

$14 \div -2 \overset{?}{>} 6 \div -2$

$-7 < -3$

تم عكس اتجاه المتباينة حتى تكون المتباينة صحيحة.

الاستنتاج:

نستنتج أن إذا ضربنا أو قسمنا طرفى (المتباينة فى أو على كمية موجبة فإن علامة المتباينة لا تتغير، ولكن إذا ضربنا أو قسمنا طرفى المتباينة فى أو على كمية سالبة فإن علامة المتباينة تتغير إلى العكس.

مثال 4

حل المتباينه الأتيه

$4x > 20$

الحل:

بقسم طرفى المتباينة على 4 +

$x > 5$

مثال 5 :

حل المتباينة الآتية:

$-4x \geq 20$

الحل :

بقسم طرفى المتباينة على -4

$x \leq -5$

مثال 6 :

حل المتباينة الآتية

$7x > -14$

الحل:

بقسم طرفى المتباينة على7

$x > -2$

مثال 7 :

حل المتباينة الآتية:

$-2x \geq -3$

الحل

بقسمة طرفى المتباينة على 2

$$x \leq \frac{3}{2}$$

مثال 8 :

حل المتباينة الآتية:

$$\frac{x}{5} \geq -3$$

الحل :

بضرب طرفى المتباينة x 5

$$x > -15$$

مثال 9 :

حل المتباينة الآتية:-

$$\frac{2x-9}{3} > 5$$

الحل:

بضرب طرفى المتباينة X 3

$$2x - 9 > 15$$

بإضافة 9+ للطرفين

$$2x > 15 + 9$$

$$2x > 24$$

بالقسم ÷ 2

$x > 12$

مثال 10:

حل المتباينة الآتية:

$7x - (x + 5) \leq 3x + 2$

الحل:

$7x - (x + 5) \leq 3x + 2$

$7x - x - 5 \leq x + 2$

بإضافة 3x- لكلا الطرفين

$6x - 5 - 3x \leq 3x + 2 - 3x$

$3x - 5 \leq 2$

بإضافة 5+ لكلا الطرفين

$3x \leq 7$

$x \leq \frac{7}{3}$

المتباينة المتكونة من جزئين :

المثال الآتي يبين طريقة حل هذا النوع من المسائل:

مثـــال

حل المتباينة الآتية:

$$\{ x : (3x - 1) < 2 \} \cap \{x : 2(5-x) \leq 16\}$$

موضحا الحل:

(أ) على صورة مجموعة.

(ب) على صورة فترة

(جـ) على خط الأعداد.

الحل :

المثال يتضمن تقاطع مجموعتين كل مجموعة تمثلها متباينة ولذلك نوجد حل كل متباينة على حدة.

$3x - 1 < 2$

بإضافة 1 + للطرفين

$3x < 3$

$x < 1$

المتباينة الثانية:

$2(5 - x) \leq 16$

$5 - x \leq 8$

بإضافة 5- للطرفين:

$5 - x - 5 \leq 8 - 5$

$-x \leq 3$

$x \geq -3$

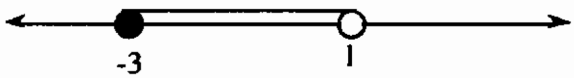
(أ) الحل على صورة مجموعة :

$\{ x : -3 \le x < 1 \}$

(ب) الحل على صورة فترة:

$[-3 , 1)$

(جـ) تمثيل الحل على خط الأعداد كما هو موضح بشكل 19



شكل 19

متباينات يكون المقام فيها متغير:

مثال : أوجد حل المتباينة الآتية:

$$\frac{3}{x - 5} \le 2$$

الحل :

الحالة الأولى :

$x - 5 > 0$

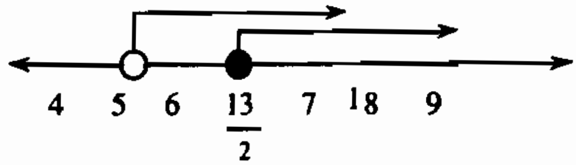
$\therefore x > 5$ .. (1) (لاحظ شكل 20

بضرب طرفى المتباينة فى (5 - x) وفى هذه الحالة لا تتغير علامات المتباينة.

$3 \le 2 (x - 5)$

$3 \le 2 x - 10$

$\therefore x \ge \frac{13}{2}$ . . .. (2) (لاحظ شكل 20



شكل 20

لاحظ أن الشرط رقم (2) فى هذه الحالة يحقق الشرط رقم (1)

$\therefore\ x \geq \frac{13}{2}$ I

الحالة الثانية:

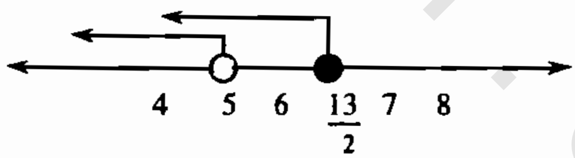
$x - 5 < 0$

$\therefore\ x > 5$ .. (3) (لاحظ شكل 21

بضرب المتباينة فى (x - 5) وفى هذه الحالة تنعكس علامة المتباينة

$\therefore\ 3 \geq 2x - 10$

$\therefore\ x \leq \frac{13}{2}$ .. (4) (لاحظ شكل 21



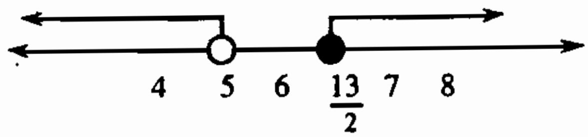
شكل 21

لاحظ أن الشرط رقم (3) يحقق الشرط رقم (4)

$\therefore\ x < 5$ II

∴ مجموعة الحل هى كلا الشرطين II, I معا وتكتب:

(لاحظ شكل 22)..... $\{ x :\ x \geq \frac{13}{2} \cup x < 5 \}$



شكل 22

ملحوظـــــة :

يمكن حل نفس المثال بطريقة النقاط الحرجة فى متباينات الدرجة الثانية والتى سيأتى ذكرها فيما بعد.

المتباينات المتكونة من ثلاثة أجزاء:

مثال :

حل المتباينة الآتية:

$7 > 2x + 1 > -3$

الحل:

يمكن حل المتباينة بتقسيمها إلى متباينتين هما :

$7 > 2x + 1 \quad , \quad 2x + 1 > -3$

وحيث إنه يتم على كل منهما نفس الإجراء. فيتم فى الاجراء الأول إضافة:

1- إلى كل منهما لتصبحا :

$6 > 2x \quad , \quad 2x > -4$

ويتم فى الاجراء الثانى القسمة على 2 لتكونا:

$3 > x \quad , \quad x > -2$

لذا يتم التعامل مع المتباينة كلها مرة واحدة بنفس الاجراءات وهي:

$7 > 2x + 1 > -3$

بإضافة 1- :

$6 > 2x > -4$

القسم على2 :

$3 > x > -2$

وتكون مجموعة الحل هى :

$\{x : 3 > x > -2\}$

تماريـــــــن (9)

أوجد حل المتباينات الآتية وكتابة الفترة فى كل منها والرسم على الأعداد :

1- $x - 10 \geq 2$

2- $x + 4 > 1$

3- $x - 6 \geq -3$

4- $x + 4 < -2$

5- $2x > 10$

6- $-2x \leq -3$

7- $4x + 2 \geq 2x + 6$

8- $6(x - 4) \geq 6$

9- $8x - 7 \geq -15$

10- $\dfrac{2 - 3x}{x - 3} \leq -2$

11- $5(x + 1) - x \leq 1 - 2x$

12- $9x - (2x + 3) \leq x + 8$

13- $\left\{x : \dfrac{x - 3}{2} < 2\right\} \cap \left\{x : 3(2-x) + 5 \leq 17\right\}$

14- إذا كان $A = \{x : -1 < x < 1\}$

$B = \{x : -3 \leq x \leq -1\}$

أوجد:

$A \cup B, \quad A \cap B, \quad A - B$
$B - A, \quad A \cup B \cap \phi.$

15 - أوجد حل المتباينه :

$3 \leq 4x - 7 < 9$

16 - أوجد حل المتباينه :

$6 \geq 2 - 4x \geq 10$

حل المتباينات الآتيه وارسمها بيانيا ثم اكتب الحل فى صورة مجموعة:

17- $\{x : \frac{x - 8}{5} < 2 - x\} \cup \{x : \frac{x}{4} + 3 < 7\}$

18- $\{x : \frac{x - 8}{4} \leq -4\} \cap \{x : 6(3 - x) < -18\}$

19- $\{x : \frac{2x - 8}{4} < 3 - x\} \cup \{x : 6(3 - x) < -18\}$

20- $\{x : 2x - 1 \leq 2 - x\} \cup \{x : 3x + 4 \leq 2x + 1\}$

21- $-5 \leq \frac{2x - 1}{3} < 3$

22- $0 \leq 3(5 - x) - 9 < 6$

23- $-2 \leq \frac{3x - 2}{4} < 1$

24- $0 \leq 4(-x - 3) - 8 \leq 4$

متباينات من الدرجة الثانية فى مجهول واحد :

يوضح حل هذا النوع من المتباينات الأمثلة الآتيه:-

مثال :

أوجد حل المتباينة الآتيه:

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

الحل :

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

يمكن تحليلها إلى أقواس على الصورة التالية:

$$(x + 5)(x - 2) > 0$$

يوجد إحتمالين للحل :

1- إشارة كل من القوسين موجبة ليكون حاصل ضرب القوسين أكبر من الصفر.

1- إشارة كل من القوسين سالبة ليكون حاصل ضرب القوسين أكبر من الصفر الاحتمال الأول.

1- إشارة كل من القوسين موجبة :

وهذا معناه أن كل قوسين على حده أكبر من الصفر وبالتالى:

$$x + 5 > 0 \quad , \quad x - 2 > 0$$

$$\therefore\ x > -5 \qquad \therefore\ x > 2$$

ويمكن اعتبار أن $x > 2$ هو حل لهذا الاحتمال لأنه يكون أيضا محققا للشرط الآخر $x > -5$ وهذا يتضح بعد التمثيل على خط لأعداد كما هو موضح بشكل 23.

وللتحقق من الحل:

نضع $x = 3$ فى المتباينة

$$\therefore\ (3)^2 + 3(3) - 10 \overset{?}{>} 0$$

$18 - 10 \overset{?}{>} 0$

$8 > 0$

شكل 23

$\therefore\ 2 < x$ يكون حلا للإحتمال الأول.

إشارة كل من القوسين سالبة:

وهذا معناه أن كل قوس على حده صفر من الصفر وبالتالى:-

$x - 2 < 0$, $x + 5 > 0$

$\therefore x < 2$ $x < -5$

ويمكن إعتبار أن $x < -5$ هو حل لهذا الاحتمال لأنه يكون أيضا محققا للشرط الآخر $x < 2$ كما هو موضع بشكل 24.

وللتحقق من الحل:

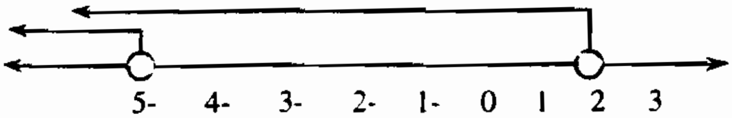
نضع $x = -6$ فى المتباينة

$$\therefore (-6)^2 + 3\ )\text{-}6)\ \text{-}10 \overset{?}{>} 0$$

$$36 - 28 \overset{?}{>} 0$$

$$8 > 0$$

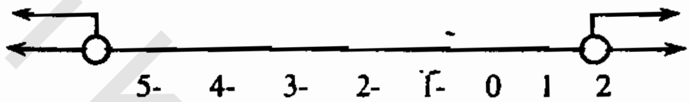
$\therefore\ x < -5$ يكون حلا للاحتمال الثانى



شكل 24

وبالتالى تكون مجموعة الحل هى :

(لاحظ شكل 25) .... $X = \{ x : -5 > x > 2 \}$



شكل 25

مثال :

حل المتباينة الآتية:

$$2x^2 - 2x \leq 24$$

الحـــل:

$$2x^2 - 2x - 24 \leq 0$$

بقسمة المتباينة على 2

$$x^2 - x - 12 \leq 0$$
$$(x + 3)(x - 4) \leq 0$$

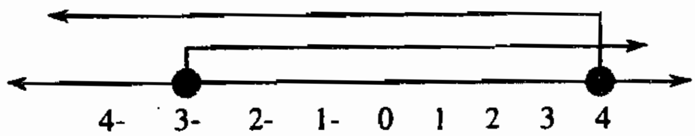
يوجد احتمالين للحل :

1 - اشارة أحد القوسين موجب والآخر سالب ليكون حاصل ضرب القوسين سالبا أى أقل من الصفر.

2 - عكس الحالة الأولى أى القوس الذى كان موجبا يكون سالبا والقوس الذى، ان سالبا يكون موجبا ليكون حاصل ضرب القوسين سالبا أى أقل من الصفر.

الاحتمال الأول. الذى يوضحه شكل 26:

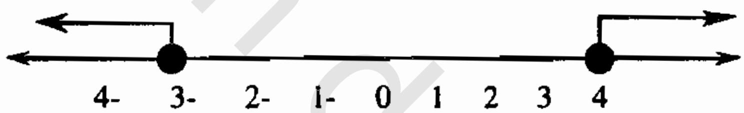
$x - 4 \leq 0$	$x + 3 \geq 0$
$x \leq 4$	$x \geq -3$



شكل 26

الاحتمال الثانى: الذى يوضحه شكل 27 :

$x - 4 \geq 0$	$x + 3 \leq 0$
$x \geq 4$	$x \leq -3$



شكل 27

نجد أن كل من الحلين مخالف للحل الآخر وبالتالى نلجأ للتحقق منهما.

للتحقق من حل الاحتمال الأول

نضع $x = 0$ فى المتباينه لأنها تحقق شرطى هذا الحتمال وهما $x \leq 4$.

$$\therefore (0)^2 - (0) - 12 \overset{?}{\leq} 0$$

$$-12 \leq 0$$

$\therefore$ حل الاحتمال الأول يحقق المتباينة.

يمكن أيضا التحقق من حل الاحتمال الثانى.

نضع 5 = فى المتباينة

$$\therefore (5)^2 - 5 - 12 \overset{?}{\leq} 0$$

$$25 - 17 \overset{?}{\leq} 0$$

$$8 \geq 0$$

∴ لا تتحقق المتباينة عند 5 = وبالتالى حل الاحتمال الثانى مرفوض.

ملحوظة: يكتفى بالتحقق من صحة المتباينة بوضع $x = 5$ والتى بينت أن المتباينة لا تتحقق بهذا الحل ولا داعى للتحقق من الشرط الثانى لهذا الاحتمال أى بوضع $x = -4$ فى المتباينة لأن رفض حل الشرط الأول $(x \geq 4)$ يلغى حل الشرط الثانى $(x \leq -3)$ حتى ولو كان صحيحا، لأنه بالضرورة تحقق الشرطين.

استخدام النقاط الحرجة لحل متباينات الدرجة الثانية:

يمكننا حل مثال 1 باستخدام النقاط الحرجة كالآتى:

$$x^2 + 3x - 10 > 0$$

$$(x + 5)(x - 2) > 0$$

لإيجاد النقاط الحرجة:

$$(x + 5)(x - 2) = 0$$

$$\therefore (x + 5) = 0$$

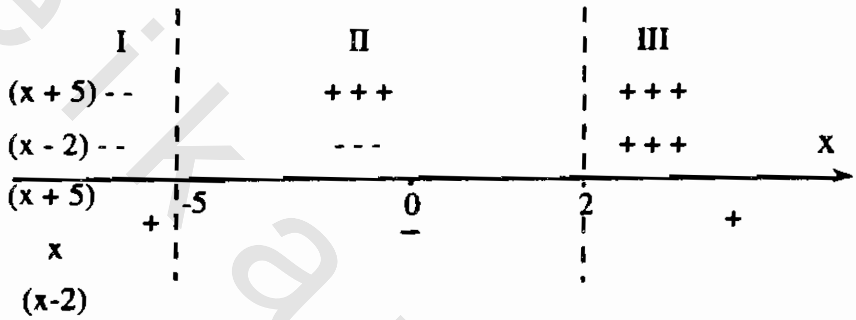
$$x = -5$$

أو

$$(x - 2) = 0$$

$x = 2$

نوقع النقطتين $x = -5$ ، $x = 2$ على خط الأعداد ليقسما مجموعة الأعداد الحقيقية إلى ثلاثة مناطق كما بالشكل 28 ونحدد اشارة كل قوس فى المناطق الثلاثة I, II, III.



شكل 28

فى المنطقة I:

ضع $x = -6$ ممثلة للمنطقة I نجد أن إشارة القوس $(x + 5)$ سالبة واشارة القوس $(x - 2)$ أيضا سالبة كما بالشكل

فى المنطقة II.

ضع $x = 0$ ممثلة للمنطقة II نجد أن إشارة القوس $(x + 5)$ موجبة وإشارة القوس $(x - 2)$ سالبه.

فى المنطقة III:

ضع $x = 3$ ممثلة لهذه المنطقة نجد أن اشارة القوس $(x + 5)$ موجبة

وإشارة القوس $(x - 2)$ سالبة.

نوجد حاصل ضرب اشارتي القوسين $(x - 2) \times (x + 5)$ أسفل خط الأعداد كما هو واضح بالشكل نجد أن :

المنطقة I، والمنطقة III حاصل ضرب اشارتي القوسين موجبا. أما المنطقة II فيكون حاصل ضرب إشارتي القوسين سالبا.

وعلى ذلك نجد أن الحل المطلوب لتحقيق المتباينة تحققه المنطقة I والمنطقة III حيث يكون حاصل ضرب اشارتي القوسين موجبا. ويكون الحل العام على الصوة التالية:

$$X = \{ x : x \leq 5 \} \cup \{ x : x \geq 2\}$$

وهو نفس الحل السابق بالطريقة الأولى.

مثال 2 :

أوجد حل المتباينه الآتيه :

$$\frac{3}{x - 5} \leq 2$$

الحل :

من الممكن أن يكون $x - 5 > 0$ كحالة أولى

وأيضا $x - 5 < 0$ كحالة ثانية (وهى كمية سالبة)

وبالتالى فإن : $(x - 5)^2 > 0$

$\therefore$ بضرب طرفى المتباينة $x\ (x - 5)^2$ لا يغير من إتجاه المتباينة.

$$\therefore (x - 5)^2 \ \frac{3}{x - 5} \leq 2\ (x - 5)^2$$

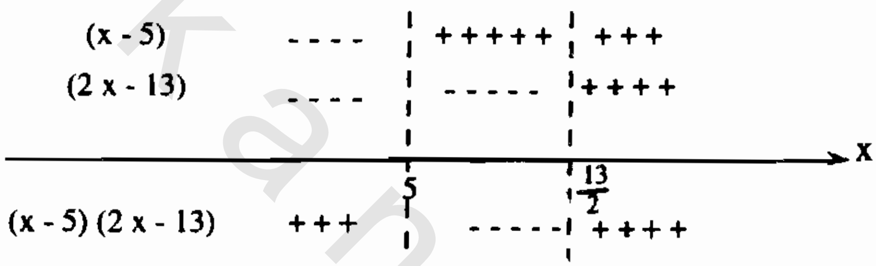
$$3x - 15 \le 2x^2 - 20x + 50$$

$$0 \le 2x^2 - 23x + 65$$

$$0 \le (2x - 13)(x - 5)$$

∴ النقاط الحرجة هي: $x = 5 \quad , \quad x = \dfrac{13}{2}$

بتوقيع النقاط الحرجة على خط الأعداد ينقسم إلى ثلاث مناطق شكل 29



شكل 29

∴ مجموعة الحل التي تحقق المتباينة هي:

$$X = \{\, x : x < 5 \;\cup\; x \ge \frac{13}{2} \,\}$$

تماريـــــــن (10)

أوجد حل المتباينات الآتية :

1- $\frac{x}{x-3} < 4$

2- $(x - 4)(x + 2) \le 0$

3- $x^2 - 1 > 0$

4- $x^2 - 1 < 0$

5- $x^2 - 7x + 10 > 0$

6- $x^2 - 25 < 0$

7- $x^2 - 25 > 0$

8- $2x^2 + 11x - 21 \ge 0$

9- $x^2 - 3x + 2 \le 0$

10- $x^2 - 9 \le 0$

11- $x^2 - 9 \ge 0$

12- $\frac{\frac{1}{2}x - 3}{x + 4} > 0$

13- $3x^2 - 2 < 0$

14- $x^2 + 3x - 10 \le 0$

15- $\frac{2}{x} < \frac{3}{x-4}$

القيمة المطلقة :

لأى عدد حقيقى x قيمة مطلقة يرمز لها بالرمز $|x|$. والتى تعرف على النحو التالى:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

فمثلا :

$$|-5| = 5, \quad |7-9| + |-2| = 2$$

$$\left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}, \quad \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 1 :

إذا كانت $x = 2, \quad y = 3$ أوجد :

$$|x|, \quad |y|, \quad |x+y|, \quad |x| + |y|$$

الحــــل :

$$|x| = |2| = 2$$

$$|y| = |3| = 3$$

$$|x+y| = |2+3| = |5| = 5$$

$$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$$

$$\therefore |x+y| = |x| + |y|$$

مثال 2 :

إذا كانت $x = -2 \ , \ y = -3$ أوجـــــد :

$$|x|, |y|, \quad |x+y|, \quad |x| + |y|$$

الحــــل:

$|x| = |-2| = 2$

$|y| = |-3| = 3$

$|x + y| = |-2 -3| = |-5| = 5$

$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$

$\therefore |x + y| = |x| + |y|$

مثال 3:

إذا كانت $y = 3$, $x = -2$ أوجد :-

$|x|$, $|y|$, $|x + y|$, $|x| + |y|$

الحـــــل :

$|x| = |-2| = 2$

$|y| = |3| = 3$

$|x + y| + |-2 + 3| = |1| = 1$

$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$

$\therefore |x + y| < |x| + |y|$

مثال 4 :

إذا كانت $y = -3$, $x = 2$ أوجـــــــد :

$|x|$, $|y|$, $|x + y|$, $|x| + |y|$

الحـــــل:

$|x| = |2| = 2$

$|y| = |-3| = 3$

$|x + y| = |2 + (-3)| = |-1| = 1$

$|x| + |y| = 2 + 3 = 5$

$\therefore |x + y| < |x| + |y|$

الاستنتاج العام :

نستنتج من الأمثلة السابقة أن :

$|x + y| \leq |x| + |y|$

فإذا كان كل من x , y عدد حقيقيا فإنه يمكن استنتاج الخواص التالية:-

1- $|x| \geq 0 \quad , \quad -|x| \leq x \leq |x|$

2- $|x| = 0 \rightarrow x = 0$

3- $|x.y| = |x|.|y|$

4- $|x - y| = |y - x|$

5- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad , \quad y \neq 0$

وتستخدم القواعد الآتية فى حل المتباينات:

I $\quad |x| < A \rightarrow -A < x < A \rightarrow x \in (-A, A)$

II $\quad |x| \leq A \rightarrow -A < x \leq A \rightarrow x \in (-A, A]$

III $\quad |x| > A \rightarrow x > A$ أو $x < -A$

IV $\quad |x| A \rightarrow x \geq A$ أو $x \leq -I$

حيث A عدد حقيقى ، x تعبر عن فترة المتباينة وجميع الخواص والقواعد السابقة مشتقة من التعريف للقيمة المطلقة.

مثال 5 :

حل المعادلة الآتية :

$|2 - x| = 3$

الحـــــل :

$2 - x = \pm 3$

$2 - x = 3$

$\therefore x = -1$

$, 2 - x = -3$

$\therefore x = 5$

مجموعة الحل هى :

$\{ -1 , 5 \}$

مثال 6 :

حل المعادلة الآتية :-

$| 2x - 1| = | 1 - x |$

الحـــــل :

$(|2x - 1|)^2 = (|1 - x|)^2$

$(2x - 1)^2 = (1 - x)^2$

$4 x^2 - 4x + 1 = 1 - 2 x + x^2$

$3 x^2 - 2 x = 0$

$x (3x - 2) = 0$

$\therefore x = 0 \quad \text{I}$

$, \quad (3x - 22) = 0$

$\therefore \quad x = \dfrac{2}{3} \quad \text{II}$

$\therefore$ مجموعة الحل هى :

$x = \left\{0 , \dfrac{2}{3}\right\}$

لاحظ أن تربيع القيمة المطلقة للطرفين فى المعادلة تلغى علامة المقياس.

مثال 7 :

حل المتباينة الآتية :-

$$\left|\frac{2x+5}{7}\right| < 3$$

الحل :

$$-3 < \frac{2x+5}{7} < 3$$

$$-21 < 2x + 5 < 21$$

$$-26 < 2x < 16$$

$$-13 < x < 8$$

مثال 8 :

حل المتباينه الآتيه :-

$$|1 - x| > |2x - 1|$$

الحـــل :

بتربيع الطرفين :

$$\therefore (1-x)^2 > (2x-1)^2$$

$$1 - 2x + x^2 > 4x^2 - 4x + 1$$

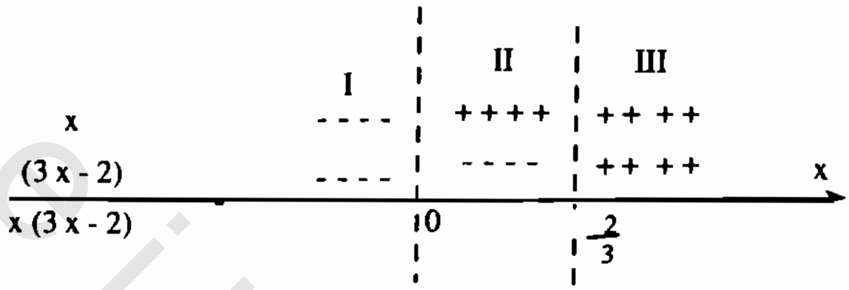
$$0 > 3x^2 - 2x$$

$$0 > x(3x - 2)$$

النقاط الحرجة هى:

$$x = 0 \quad , \quad x = \frac{2}{3}$$

بوضع قيم x الحرجة على خط الأعداد وإيجاد إشارتى x , (3 x - 2) فى الثلاث مناطق شكل 30.



شكل 30

$\therefore$ مجموعة الحل هى : $x = \left\{0 , \frac{2}{3}\right\}$

تمارين (11)

١- عبر عن كل مما يأتي:

(a) $|17|$

(b) $|-26|$

(c) $\left|-\frac{2}{3}\right|$

(d) $\left|\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right|$

(e) $\left|\frac{2}{3}\right|+\left|-\frac{1}{2}\right|$

(f) $\left|\sqrt{2}-2\right|$

(g) $|\Pi - 4|$

2 - عبر عن كل مجموعة مما يأى بشكل فترة أو مجموعة فترات :

(a) $\{x : |x - 1| > 2\}$

(b) $\{x : |x - 1| < 4\}$

(c) $\{x : |x - 2| \geq 5\}$

3- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتيه :

(a) $|x - 3| \leq 4$

(e) $|x + 2| > 3$

(b) $|2x - 5| < 1$

(f) $|3x - 1| \geq |5x + 2|$

(c) $|3x - 7| < 5$

(g) $|3x - 2| \geq 6$

(d) $\left|\frac{3 - x}{5}\right| \geq 1$

(h) $\left|2x - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{3}{2}$

4- أوجد مجموعة الحل للمتباينات الآتية:

(a) $\dfrac{x}{x - 1} \geq 0$

(b) $\dfrac{x}{x - 2} \geq 2$

(c) $\dfrac{x + 1}{2 - x} \leq 3$

(d) $\dfrac{1}{x} \geq 4$

5- إذا كانت :

$I_1 = \{x : |x - 1| \leq 5\}$

$I_2 = \{x : |2x + 1| > 2\}$

أكتب كل من I_1 , I_2على شكل فترات ثم أوجد :

$I_1 \cap I_2 \;.\; I_1 \cup I_2 \;,\; I_1 \;,\; - I_2$

6- أوجد مجموعة الحل للمعادلات الآتيه :

(a) $|6x - 2| = 7$

b- $|6x - 7| = |3 + 2x|$

(c) $|9x - 11| = x$

d - $\left|\dfrac{x + 5}{2 - x}\right| = 6$

الكسور الجزئية

المتطابقة :

هى عبارة عن معادلة متساوية لجيمع قيم المتغير. فمثلا:-

$$3x - 1 = A_1 (x - 1) + A_2 (x - 2)$$

تعبر عن متطابقة تحتوى على الثوابت A_2 , A_1

طرق تعيين الثوابت:

الطريقة الأولى:-

نعوض عن قيم للمتغير x بحيث تلغى أقواسا فتقل عدد الثوابت (عدد المجاهيل) ليصبح ثابتا واحدا عن كل تعويض يمكن إيجاد قيمته بسهوله. كالآتى:-

بوضع $x = 1$ فى طرفى المتطابقة :-

$$3(1) - 1 = A_1 (1 - 1) + A_2 (1 - 2)$$

$$2 = 0 - A_2$$

$$\therefore A_2 = -2$$

بوضع $x = 2$ فى طرفى المتطابقة :-

$$3(2) - 1 = A_1 (2-1) + A_2 (2 - 2)$$

$$5 = A1$$

$$\therefore A_1 = 5$$

الطريقة الثانية : -

بمساواة معاملات x فى الطرفين لجميع قوى x المختلفة :

$$3x - 1 = A_1 x - A_1 + A_2 x - 2A_2$$
$$= (A_1 + A_2) x - A_1 - 2A_2$$

$$\therefore 3 = A_1 + A_2 \qquad (1)$$
$$-1 = -A_1 - 2A_2 \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) , (2)

$$\therefore -A_2 = 2$$
$$\therefore A_2 = -2$$

بالتعويض عن قيمة A_2 فى المعادلة (1)

$$A_1 = 3 - A_2$$
$$= 3 - (-2) = 5$$

مثال 2 :

أوجد قيم الثوابت فى المتطابقة الآتية:

$$x^2 + 2x + 1 = A_1 (x + 1) + A_2 (x - 2)$$

الحل :

ضع $x = -1$ فى الطرفين :-

$$(-1)^2 + 2(-1) + 1 = A_1 (-1 + 1) + A_2 (-1 - 2)$$
$$0 = -3A_2$$
$$\therefore A_2 = 0$$

ضع $x = 2$ فى الطرفين :

$$(2)^2 + 2(2) + 1 = A_1 (2+1) + A_2 (2 - 2)$$

$$9 = 3A_1$$

$$\therefore A_1 = 3$$

مثال 3 :

أوجد قيم الثوابت فى المتطابقة :-

$$5x - 1 = A_1 (x - 1)(x - 2) + A_2 (x - 2)(x + 3) + A_3 (x - 1)(x + 3)$$

الحــــل :

ضع $x = 1$ فى الطرفين

$$5(1)-1=A_1(1-1)(1-2)+A_2(1-2)(1+3)+A_3(1-1)(1+3)$$

$$5 - 1 = 0 + A_2(-1)(4) + 0$$

$$4 = -4A_2$$

$$\therefore A_2 = -1$$

ضع $x = 2$ فى الطرفين :-

$$5(2)-1 = A_1(2-1)(2-2) + A_2(2-2)(2+3) + A_3(2-1)(2+3)$$

$$10 - 1 = 0 + 0 + A_3(1)(5)$$

$$9 = 5A_3$$

$$A_3 = \frac{9}{5}$$

ضع $x = -3$ فى الطرفين :-

$$5(-3)-1 = A_1(-3-1)(-3-2) + A_2(-3-2)(-3+3) + A_3(2-1)(2+3)$$

$$-15 - 1 = A_1(-4)(-5) + 0 + 0$$

$$-16 = A_1(20)$$

$$A_1 = \frac{-16}{20} = \frac{-4}{5}$$

الكسور الجزئيـــــــة :

تعرف الكسور الجزئية على إنها خارج قسمة كثيرتي الحدود. ويسمى الكسر بالكسر الحقيقي إذا كانت درجة البسط أقل من درجة المقام، ويسمى بالكسر الغير حقيقي عندما يكون درجة البسط أكبر من أو يساوي درجة المقام.

ويمكن كتابة الكسر الغير حقيقي على صورة حاصل جمع كثيرة الحدود بالاضافة الى كسر حقيقي. ومثال ذلك:

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 2} = (x + 1) + \frac{3}{x + 2}$$

كسر حقيقي + كثيرة الحدود = كسر غير حقيقي

ويمكن جمع اثنين أو أكثر من الكسور الحقيقية للحصول على كسر حقيقي واحد. بإيجاد المقام المشترك ثم يتم الجمع كالآتي:

$$\frac{1}{x + 2} + \frac{2}{3x + 2} = \frac{3x + 2 + 2(x + 2)}{(x + 2)(3x + 2)}$$

$$= \frac{5x + 6}{(x + 2)(3x + 2)}$$

وموضوعنا الحالى هو عكس هذه العملية (عكس هذا الاجراء) أى تجزئة الكسر الحقيقى الى كسور حقيقة. ويتم ذلك كالآتى:

الحالة الأولى:

حالة جميع عوامل المقام من الدرجة الأولى حقيقية ومختلفة:

نفرض أن الكسر = $F(x) / \phi(x)$

حيث المقام كثيرة الحدود من الدرجة n والتى يمكن تحليلها إلى n من العوامل الأولية الحقيقية من الدرجة الأولى على الصورة:

$\phi(x) = (x - x_1)(x - x_2)$

حيث يمكن كتابة الكسر على الصورة :-

$$\frac{F(x)}{\phi(x)} = \frac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2).......\quad(x-x_n)}$$

ويمكن وضعها على صورة مجموع كسور حقيقية :

$$\frac{F(x)}{(x-x_1)(x-x_2)................\quad(x-x_n)} = \frac{A_1}{(x-x_1)} + \frac{A_2}{(x-x_2)} + ... + \frac{A_n}{(x-x_n)}$$

وبعد ذلك يتم توحيد المقام فى الطرف الأيمن ومساواة البسط فى الطرف الأيمن بالبسط فى الطرف الأيسر. نحصل على:

$$\begin{aligned} F(x) = {} & A_1\,(x-x_2)(x - x_3)\ ....\ (x-x_n) \\ & + A_2\,(x - x_1)(x - x_3)\ ....\ (x - x_n) \\ & + A_3\,(\qquad)(\qquad)\qquad(\qquad) \\ & + A_n\,(x-x_1)\quad(x - x_2)..........\ (x - x_n) \end{aligned}$$

وبمساواة قوى x المختلفة فى الطرفين نحصل على n من المعادلات

والتى بحلها نحصل على الثوابت $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$

ويمكن الحصول على هذه القيم بطريقة أخرى. وذلك بوضع $x = x_1$ فى المتطابقة السابقة يتم الحصول على :

$$F(x_1) = A_1\,(x_1 - x_2)(x_1 - x_3).....\qquad(x_1 - x_n)$$

$$A_1 = \frac{F(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ ....\ (x_1 - x_n)}$$

وبالمثل بوضع $x = x_2$ يمكن تعيين : $- A_2$:-

$$A_2 = \frac{F(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\ ...\ (x_2 - x_n)}$$

وهكذا يمكن تعيين الثوابت (A) وسوف نوضح هذا في المثال الآتي.

مثال 1

حلل الكسر :

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)}$$

إلى كسوره الجزئية

الحـــــل :

$$\frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{A_1}{(x+2)} + \frac{A_2}{(3x-2)} \qquad (1)$$

$$= \frac{A_1(3x-2) + A_2(x+2)}{(x+2)(3x-2)}$$

∴ بسط الطرف الأيمن = بسط الطرف الأيسر

$$\therefore 5x+2 = A_1(3x-2) + A_2(x+2)$$

ضع $x = -2$ في الطرفين

$$5(-2)+2 = A_1(3(-2)-2) + 0$$

$$-8 = -8A_1$$

$$A_1 = \frac{-8}{-8} = 1$$

ضع $x = \frac{2}{3}$ في الطرفين

$$5\left(\frac{2}{3}\right) + 2 = A_1\left(3\left(\frac{2}{3}\right) - 2\right) + A_2\left(\frac{2}{3} + 2\right)$$

$$\frac{10+6}{3} = 0 + A_2\left(\frac{2+6}{3}\right)$$

$$A_2 = \frac{16}{8} = 2$$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{5x+2}{(x+2)(3x-2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(3x-2)}$$

مثـــال 2 :

حلل الكسر

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

الى كسور الجزئية :

الحل :

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{A_1}{(x-1)} + \frac{A_2}{(x+1)} + \frac{A_3}{(x-2)} \qquad (1)$$

$$= \frac{A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x-2)}$$

$$\therefore 2x+3 = A_1(x+1)(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-1)(x+1)$$

ضع $x = -1$ فى الطرفين

$$2(-1)+3 = A_1(-1+1)(-1-2) + A_2(-1-1)(-1-2) + A_3(-1-1)(-1+1)$$

$$\therefore 1 = 0 + 6A_2 + 0$$

$$A_2 = \frac{1}{6}$$

ضع $x = 1$

$$\therefore 2(1)+3 = A_1(1+1)(1-2) + 0 + 0$$

$$5 = -2A_1$$

$$A_1 = -\frac{5}{2}$$

ضع $x = 2$

$$2(2)+3 = A_1\,(2+1)\,(2-2) + A_2\,(2-1)\,(2-2) + A_3(2-1)\,(2+1)$$

$$7 = \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + 3A_3$$

وبالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)(x-2)} = -\frac{5}{2(x-1)} + \frac{1}{6(x+1)} + \frac{7}{3(x-2)}$$

حل آخر :

لايجاد قيمة : A_1 نعوض عن $x = 1$ فى الطرف الأيسر ما عدا المقدار $(x-1)$:

$$\therefore A_1 = \left[\frac{2x+3}{(x+1)(x-2)}\right]_{x=1}$$

$$= \left[\frac{2(1)+3}{(1+1)(1-2)}\right] = -\frac{5}{2}$$

لايجاد قيمة A_2 نعوض عن $x = -1$ فى الطرف الأيسر ما عدا المقدار $(x+1)$: -

$$A_2 = \left[\frac{2x+3}{(x-1)(x-2)}\right]_{x=-1}$$

$$= \left[\frac{2\,(-1) + 3}{(-1-1)\,(-1-2)} \right] = \frac{1}{(-2)\,(-3)} = \frac{1}{6}$$

لايجاد قيمة A_3 نعوض عن $x = 2$ فى الطرف الأيسر ماعدا المقدار $(x-2)$:-

$$A_3 = \left[\frac{2x + 3}{(x - 1)\,(x + 1)} \right]_{x=2}$$

$$= \left[\frac{2\,(2) + 3}{(2-1)\,(2+1)} \right] = \frac{7}{(1)\,(3)} = \frac{7}{3}$$

بالتعويض فى المعادلة (1)

$$\therefore \frac{2x + 3}{(x - 1)\,(x + 1)\,(x - 2)} = \frac{-5}{2\,(x-1)} + \frac{1}{6\,(x + 1)} + \frac{7}{3\,(x - 2)}$$

وعلى الطالب تطبيق هذه الطريقة على الأمثلة السابقة.

الحالة الثانية :

بعض عوامل المقام من الدرجة الأولى ولكنها متساوية :-

مثال ذلك كسر حقيقى على الصورة :-

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x - 1)^3\,(x - 2)}$$

نضع العامل المكرر $y = x - 1$

نحول الكسر من داله فى x إلى دالة فى y كالآتى:-

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x - 1)^3 \, (x - 2)} = \frac{(y + 1)^2 + y + 1 + 2}{y^3 \, (y - 1)}$$

$$= \frac{y^2 + 2y + 1 + y + 1 + 2}{y^3 \, (y - 1)}$$

$$= \frac{4 + 3\,y + y^2}{y^3 \, (y - 1)}$$

بقسمة البسط $(4 + 3\,y + y^2)$ على $(-1 + y)$ ونستمر فى عملية القسمة حتى نحصل على باقى يحتوى على y مرفوع لأس يساوى درجة العامل المكرر وهو 3 ليكون الكسر على هذه الصورة:-

$$\frac{4 + 3y + y^2}{y^3 \, (y-1)} = \frac{1}{y^3}\left[-4 - 7y - 8y^2 + \frac{8y^3}{-1+y}\right]$$

$$= \frac{-4}{y^3} - \frac{7}{y^2} - \frac{8}{y} + \frac{8}{-1 + y}$$

وبإرجاع قيم مرة ثانية نجد أن الكسر يساوى :

$$\frac{4 + 3y + y^2}{y^3 \, (y-1)} = \frac{-4}{(x-1)^3} - \frac{7}{(x-1)^2} - \frac{8}{(x - 1)} + \frac{8}{(x - 2)}$$

أىّ أن العامل المكرر $(x-1)^3$ فى المقام يناظره ثلاثة كسور جزئية على الصورة :-

$$\frac{A_1}{(x - 1)^3} + \frac{A_2}{(x - 1)^2} + \frac{A_3}{x - 1}$$

وبوجه عام فإن لدينا القاعدة الآتية :-

كل عامل فى المقام على الصورة $(x - A)^r$ يقابله r من الكسور الجزئية على الصورة :-

$$\frac{A_1}{(x - A)^r} + \frac{A_2}{(x - A)^{r-1}} + \dots + \frac{A_r}{(x - A)}$$

ويتضح هذا من المثال الآتى:

مثال :

حلل الكسر :-

$$\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)}$$

إلى كسوره الجزئية

الحل:

$$\frac{2x + 1}{(x + 1)(x^2 - 3x - 4)} = \frac{2x + 1}{(x + 1)(x + 1)(x - 4)}$$

$$= \frac{2x + 1}{(x + 1)^2 (x - 4)}$$

$$\therefore \frac{2x + 1}{(x+1)^2(x-4)} = \frac{A_1}{(x+1)^2} + \frac{A_2}{x+1} + \frac{A_3}{x-4} \qquad (1)$$

ضرب الطرفين X $(x + 1)^2 (x - 4)$

$$\therefore 2x + 1 = A_1 (x - 4) + A_2 (x + 1)(x-4) + A_3 (x + 1)^2$$

ضع $x = -1$ فى الطرفين :

$$2(-1)+1 = A_1(-1-4) + A_2(-1+1)(-1-4) + A_3(-1+1)^2$$

$$-1 = -5A_1 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0$$

$$A_1 = \frac{1}{5}$$

ضع $x = 4$ فى الطرفين :-

$$2(4)+1 = A_1(4-4) + A_2(4+1)(4-4) + A_3(4+1)^2$$

$$9 = \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + 25A_3$$

$$A_3 = \frac{9}{25}$$

ضع $x = 0$ مع التعويض عن قيم A_1 , A_3 :-

$$2(0)+1 = A_1(0-4) + A_2(0+1)(0-4) + A_3(0+1)^2$$

$$1 = -4A_1 \quad -4A_2 \quad + A_3$$

$$1 = -4\left(\frac{1}{5}\right) - 4A_2 + \frac{9}{25}$$

$$4A_2 = \frac{9-20}{25} = -\frac{11}{25}$$

$$\therefore A_2 = -0.11$$

بالتعويض عن قيم A_1 , A_2 , A_3 فى المعادلة (1) :-

$$\therefore \frac{2x+1}{(x+1)^2(x-4)} = \frac{1}{5(x+1)^2} - \frac{0.11}{(x+1)} + \frac{9}{25(x-4)}$$

تمارين (12)

حلل كل من الكسور الآتية إلى كسور جزئية: -

1- $\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

2 - $\dfrac{x}{x(x+2)}$

3- $\dfrac{2}{(x-1)(x-2)}$

4- $\dfrac{2x+1}{x^2+10x+21}$

5- $\dfrac{x+1}{(x-1)(x+2}$

6- $\dfrac{2x}{x^2-x-12}$

7- $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x+2)}$

8- $\dfrac{2x+1}{x^2-4}$

9- $\dfrac{x-4}{x(x-2)}$

10 - $\dfrac{x-1}{x+1}$

11- $\dfrac{x+4}{x(x+2)}$

12 - $\dfrac{x+2}{x^2-x-6}$

13- $\dfrac{2x+2}{x^2-x-12}$

14- $\dfrac{x^2+1}{x^2-5x+6}$

15- $\dfrac{6x}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

16- $\dfrac{x-1}{(3x-5)(x+2)}$

17- $\dfrac{6x^2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

18 - $\dfrac{3x^2+2x+5}{x^2-1}$

19- $\dfrac{x^2+1}{x(x-1)(x+2)}$

20- $\dfrac{4x^2+5x+3}{(x+1)(x-2)}$

21- $\dfrac{x+3}{(x-1)^2(x+2)}$

22- $\dfrac{x^3+4x^4+3x}{x^2+3x+2}$

23- $\dfrac{2x+3}{(x+2)^2(x+1)}$

24 - $\dfrac{2x^3-3x^2-4x+10}{2x^2+x-6}$

الحالة الثالثة :

المقدار يحتوى على عوامل من الدرجة الثانية لا يمكن تحليلها إلى عوامل حقيقيـه.

فى هذه الحالـــة يمكن تحليل العامل إلى عـاملين تخيلين فـمثلا المقدار $(x - a)^2 + b^2$ يمكن تحليله إلى عاملين تخيلين على الصورة

$[x - a) + ib] [(x-a) -ib]$ حيث $i = \sqrt{-1}$

أى يمكن أن يناظره كسران جزئيان على الصورة:

$$\therefore \frac{A}{(x - a) + i\,b} + \frac{B}{(x - a) - ib} = \frac{cx + D}{(x - a)^2 + b^2}$$

أى أن كل عـامل من الدرجة الثانية لا يمكن تحليله الى عوامل حقيقيه من الدرجة الأولى فإننا نفرض له كسر بسطه من الدرجة الأولى ومقامه نفس المقام.

مثال :

حلل الكسر الآتى :

$$\frac{2}{(x - 1)\,(x^2 + x - 4)}$$

إلى كسوره الجزئيه

الحـــــل :

$$\frac{2}{(x - 1)\,(x^2 + x - 4)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B\,x + C}{(x^2 + x - 4)}$$

$$\therefore\ 2 = A\,(x^2 + x - 4) + (B\,x + c)\,(x - 1)$$

بمساواه قوى x فى الطرفين نجد أن :

معامل x^2 يعطى $0 = A + B$

معامل x يعطى $0 = A + C - B$

معامل x^0 يعطى $2 = -4A - C$

وبحل هذه المعادلات الثلاث نحصل على :-

$A = -1 \quad , B = 1 \quad , C = 2$

$$\therefore \frac{2}{(x-1)(x^2+x-4)} = \frac{(x+2)}{(x^2+x-4)} - \frac{1}{(x-1)}$$

تماريـــــن (13)

حلل كل من الكسور الآتيه إلى كسوره الجزئيه :

1- $$\frac{2x + 2}{x^2 - x - 12}$$

2- $$\frac{x + 3}{(x - 1)^2 (x + 1)}$$

3- $$\frac{2 + x}{1 - x^3}$$

4- $$\frac{x^3 - x + 4}{(x - 1)(x + 1)(1 + x^2)}$$

5- $$\frac{2x^3 + x^2 - x - 3}{x(x - 1)(2x + 3)}$$

6- $$\frac{3 + x^2}{(1 - x)^2 (1 + x^2)}$$

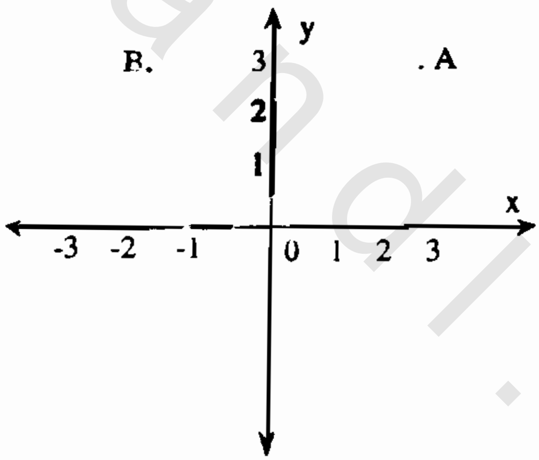
الباب الثانى

الهندسة التحليلية

نظم المحاور الكارتيزيه :

تتحدد المحاور الكارتيزيه كما بشكل (31) من خط رأسى وخط أفقى يقسمان المستوى (ورقة الرسم) إلى أربعة أرباع. وتسمى نقطة تقاطع الخطين بنقطة الأصل ويرمز لها بالرمز "0" ويسمى الخط الأفقى بالمحور x والخط الرأسى بالمحور Y. ويدرج المحورين بوحدات مناسبة فتكون الوحدات على يمين ويسار نقطة الأصل بالوحدات الموجبه والسالبه على الترتيب للمحور x ، والوحدات أعلى وأسفل نقطة الأصل بالوحدات الموجبه والسالبه على الترتيب للمحور Y.

وتتحدد أىّ نقطة فى هذا المستوى فى صورة أزواج من الأعداد الحقيقية وتكتب على الصورة (x , y) مثل A (2, 3) أو B (-2, 3) حيث يسمى العدد الأول بالإحداثى x والعدد الثانى بالإحداثى Y.



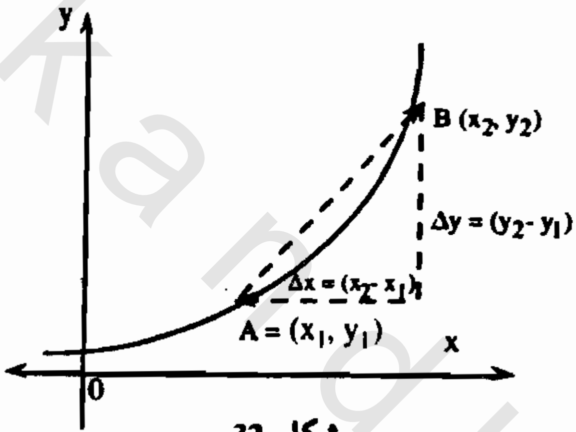
شكل 31

البعد بين نقطتين :

بأخذ محورين متعامدين بمثلا المحاور الكارتيزيه x - y ، وباستعمال وحدة قياسى مناسبة مدرجة عليهما يمكن تحديد الوضع الابتدائى والوضع النهائى لأى نقطة فى هذا المستوى (شكل 32).

فإذا كان الوضع الابتدائى لنقطة هو : $A\ (x_1,\ y_1)$

وكان الوضع النهائى لهذه النقطة هو : $B\ (x_2\ ,\ y_2)$



شكل 32

إن مقدار التغير فى اتجاه المحور x ويرمز له بـ Δx هو :

$$\Delta\ x = x_2 - x_1$$

ومقدار التغير فى اتجاه المحور Y ويرمز له بـ Δy هو :

$$\Delta\ y = y_2 - Y_1$$

وبتطبيق نظرية فيثاغورث يمكن إيجاد البعد بين النقطتين $\overline{AB}$

$$\overline{AB} = \sqrt{\Delta(x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1)$$

مثال 1 :

إذا كانت النقطة $A\ (-1, 2)$, $B\ (2, -2)$ أوجد البعد بينهما

الحل :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 2-(-1) = 3$$

$$\Delta y = y_2 - y_1 = -2 -2 = -4$$

$\therefore$ المسافه بين النقطتين والمعبر عنها بالطول $\overline{AB}$ هى:

$$\overline{AB} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-4)^2} = 5$$

مثـــــال 2 :

إذا تحركت نقطة وضعها الابتدائى هو $A\ (-2, 3)$ وكأن التغير , $\Delta x = 5$

$\Delta y = -6$ فما هو موضعها الجديد ؟

الحل :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

$$\therefore x_2 = \Delta x + x_1 = 5 - 2 = 3$$

$$\Delta y = y_2 - y_1$$

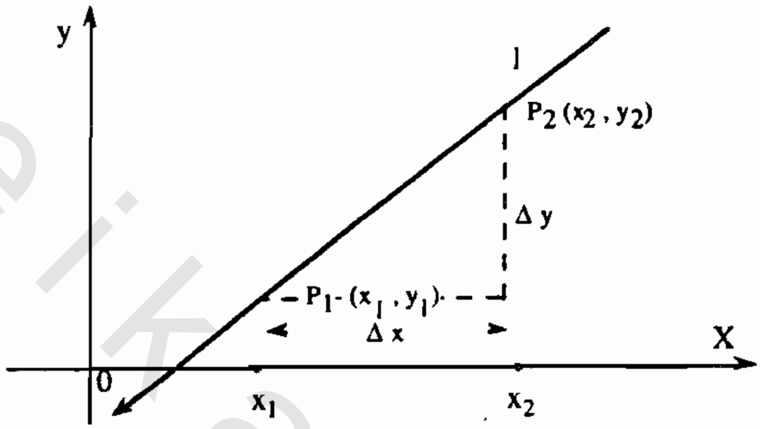
$$y_2 = \Delta y + y_1 = -3$$

$\therefore$ الموضع الجديد للنقطة هو :

$B\ (3 , - 3)$

ميل الخط المستقيم :

النقطتيــن $P_1(x_1 , y_1)$ ، $P_2(x_2 , y_2)$ يمـر بهمـا المسـتـقيـم I شكل 33



شكل 33

نجد من الشكل أن :-

$$\Delta x = x_2 - x_1$$
$$\Delta y = y_2 - y_1$$

ويعرف ميل الخط المستقيم والذى يرمز له بـ m كالآتى:

$$m = \frac{\text{التغير فى الاتجاه الرأسى}}{\text{التغير المقابل فى الاتجاه الأفقى}}$$

$$= \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (2)$$

مثـــال 3 :

إذا كانت $P_1\ (1,2)$ ، $P_2(3,8)$ نقطتين أوجد ميل المستقيم المار بهما.

الحل :

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{8 - 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$$

مثـــــال 4 :

فى أى نقطة يقطع المستقيم 1 فى المثال 3 المحور x.

الحـــــل :

نفرض أن نقطة التقاطع هى (P_3 (x_3 , 0

وبما أن (2 ,1) P_2 تقع على المستقيم،

$$\therefore \Delta x = \frac{1}{3} \Delta y$$

$$= \frac{1}{3}(2 - 0) = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} = 1 - x_3$$

$$\therefore x_3 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore P_3 \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

حالات ميل الخط المستقيم:

يعرف الميل أيضا بأنه ظل الزاوية التى يصنعها المستقيم مع الجزء الموجب للمحور x. أى أن :

$$m = \tan \phi$$

وعلى ذلك يوجد أربع حالات لميل الخط المستقيم ، شكل 34 :

1 - الحالة الأولى:

إذا كان المستقيم يميل فى قسمه العلوى نحو اليمين كما فى شكل (4 - a). حيث تزيد Δy بزيادة Δx وفى هذه الحالة تكون $0^\circ < \phi < 90^\circ$

ويكون $\tan \phi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ موجباً.

2- الحالة الثانية :

يكون المستقيم فى جزئه الأسفل ناحية اليمين كما فى شكل (4 - b) حيث تقل Δy بزيادة Δx وفى هذه الحالة تكون $90^\circ < \phi < 180^\circ$

ويكون $\tan \phi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ سالبا

3- الحالة الثالثة :

يكون المستقيم فيها أفقيا كما فى شكل (4 - c). حيث $\Delta y = 0$ مهما كانت قيمه Δx وبالتالى تكون $\phi = \theta^\circ$

حيث :

$$\tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

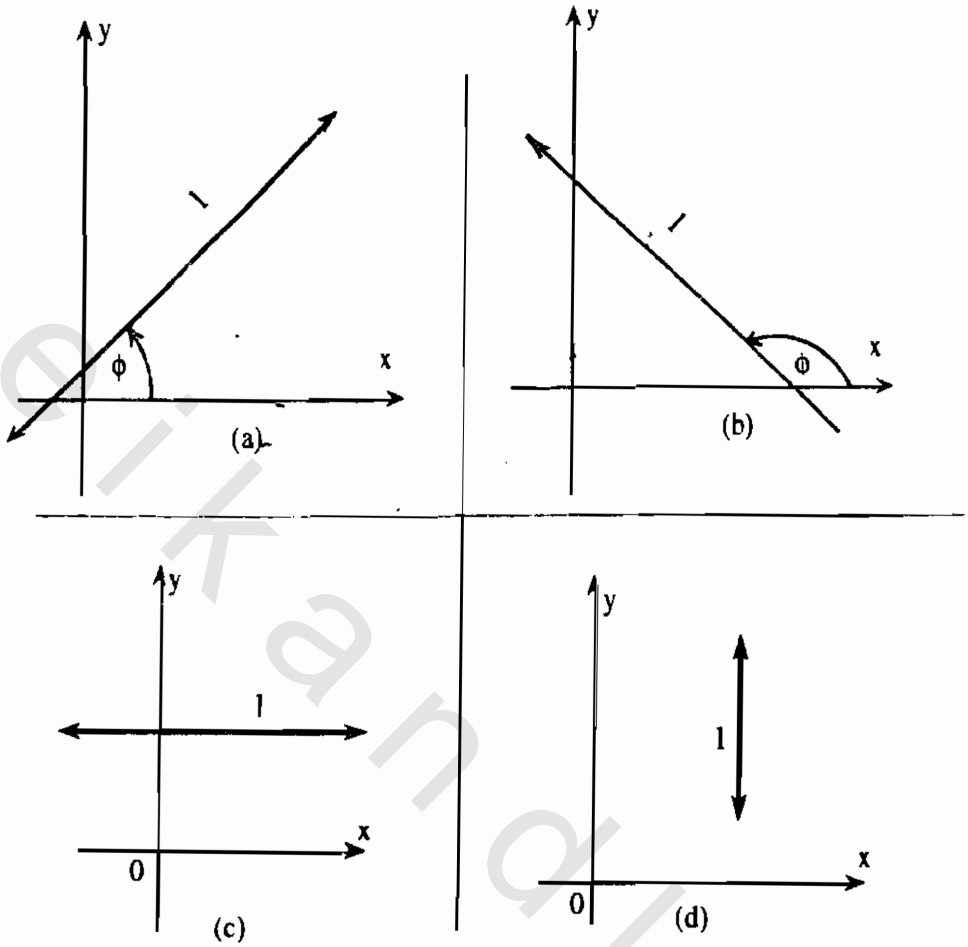
4- الحالة الرابعة :

يكون المستقيم فيها رأسيا حيث تكون $\Delta x = 0$ مهما كانت قيمة Δy

وبالتالى فإن (شكل 4 - d) :-

$$\tan \phi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{كمية غير معرفه}$$

$$\therefore \ \phi = 90^\circ$$



شكل 34

المستقيمان المتوازيان :

يتوازى المستقيمان إذا ساوى ميل كل منهما الآخر.

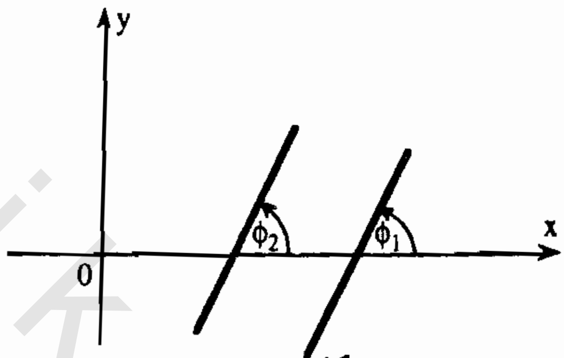
أى أن :

$$m_1 = m_2$$

$\tan \phi_1 = \tan \phi_2$

$\therefore \phi_1 = \phi_2$

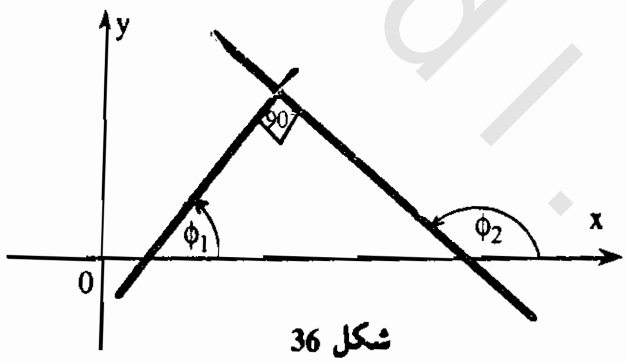
أي تتساوى زواياهما مع الجزء الموجب للمحور x كما في شكل (35).



شكل 35

المستقيمان المتعامدان :

ويوضحها شكل (36)



شكل 36

حيث نرى من الشكل أن :-

$\phi_2 = 90^\circ + \phi_1$

$$\tan \phi_2 = \tan (90^\circ + \phi_1)$$

$$= - \text{cat}\ \phi_1$$

$$\therefore \tan \phi_2 = - \frac{1}{\tan \phi_1}$$

$$\therefore m_2 = \frac{-1}{m_1}$$

حيث يكون شرط التعامد هو :-

$$m_2 . m_1 = - 1 \qquad (3)$$

تمارين (14)

1- ضع النقاط الآتية على المحاور الكارتيزية ثم أوجد ميل المستقيم المار بهما - B, A فى كل حالة - وأيضا ميل العمودى عليه :-

A	5,0	0,0	0,0	0,3	2,-1	-1,2
B	0,1	0,5	5,0	2,-3	-2,1	-2,-1

2- ضع النقاط الآتيه على المحاور الكارتيزيه وبين الحالات التى يكون فيها الشكل ABCD متوازى أضلاع والحالات التى يكون فيها الشكل مربع أو مستطيل :-.

A	-1,0	-2,2	3,1	0,1
B	0,-1	1,3	2,2	1,2
C	0,-1	1,3	2,2	2,1
D	0,2	-1,-1	1,0	1,0

3 - لدينا النقاط (1- ,0) C (3, 4), B (4, 0), A بين أن ABC مثلث قائم الزاويه وأوجد مركز الدائرة المارة برؤوسه ونصف قطرها.

4- لتكن $P_1\ (x_1, y_1)$. و $P_2\ (x_2\ , y_2)$ أوجد منتصف P_1P_2.

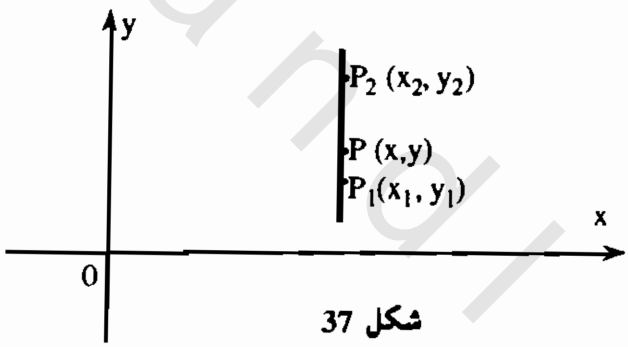
معادلات الخط المستقيم:

نفترض المستقيم I يمر بالنقطتين $P_1\ (x_1, y_1)$، $P_2\ (x_2, y_2)$ والمطلوب ربط الاحداثى x بالاحداثى y فى النقطة $P\ (x, y)$ الواقعة على المستقيم. وعلى ذلك يجب معرفة الحالتين الآتيتين:

الحالة الأولى :

$x_2 = x_1$ (شكل 37)

فى هذه الحالة يكون المستقيم 1 رأسياه ولجيمع نقاطه لا يتغير الأحداثى x (أى يكون ثابتا). وعلى هذا فإن $P\ (x, y)$ تقع على المستقيم إذا كان $x = x_1$، والأحداثى y يأخذ عدد لا نهائى من القيم.



شكل 37

الحالة الثانية :

$x_2 \neq x_1$ (شكل 38)

نعلم أن ميل المستقيم m هو :-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وأن النقطة $P(x, y)$ تقع على المستقيم إذا انطبقت النقطة p على P_1 أو تساوى ميل pp_1 مع الميل P_1P_2 وفى هذه الحافة فإن:-

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\therefore y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (4)$$

وتسمى هذه المعادلة. معادلة الخط المستقيم بدلاله ميله ونقطه يمر بها $P_1(x_1, y_1)$ شكل 38 - a حيث m, x_1, y_1 ثوابت ، x, y متغيرين.

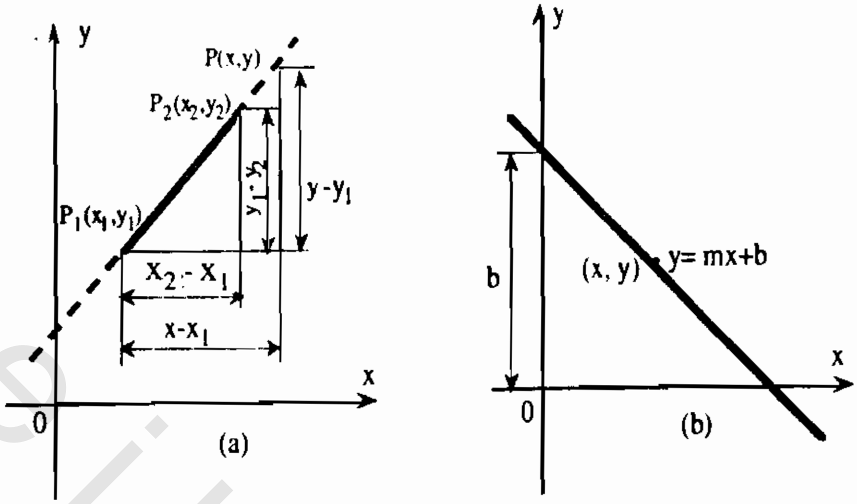
ومن الممكن كتابه المعادلة رقم (4) على الصورة :-

$$y = m x - m x_1 + y_1$$

$$\therefore y = m x + b \qquad (5)$$

حيث $b = y_1 - mx_1$

عند وضع $x = 0$ تصبح قيمة $y = b$ وعلى ذلك تكون النقطه $(0 , b)$ واقعة على المستقيم وتقطع المحور y عند b (طول الجزء المقطوع على المحور y يساوى b). ولذا تسمى هذه المعادلة بمعادلة الخط المستقيم بدلالة الميل والجزء المقطوع من المحور y (شكل b - 38).



شكل 38

مثال 1:

أوجد ميل المستقيم $y = 2x + 3$ وأيضا الجزء المقطوع من المحور y

الحـــــل :

بمقارنة معادلة المستقيم بالمعادلة رقم (5)

$\therefore m = 2$

$b = 3$

∴ ميل المستقيم $= 2$

، الجزء المقطوع من المحور $y = 3$.

وبوجه عام يمكن وضع معادلة المستقيم على الصورة :

$$Ax + By + C = 0 \qquad (6)$$

حيث A, B, C ثوابت .

ويكون أحد الثابتين A أو B على الأقل لا يساوى صفر فإذا كان :

1- $B = 0$

$\therefore Ax + c = 0$

$$\therefore x = -\frac{C}{A} \qquad (7)$$

وتكون هذه المعادلة معادلة مستقيم رأسى.

2- $B \neq 0$

$\therefore By = -Ax - c$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B} \qquad (8)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بمعادلة رقم (5) :-

$$\therefore m = \frac{-A}{B} \quad , \quad b = \frac{-C}{B}$$

وتعتبر المعادلة رقم (8) معادلة خطية من الدرجة الأولى.

طول العمود الساقط من النقطة $P_1\ (x_1,\ y_1)$ على المستقيم $Ax + By + c = 0$

يرمز لطول هذا العمود بالرمز d ، يكون وفقا للصيغة:

$$d = \frac{|Ax_1 + B\,y_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

وسوف نكتفى باستخدامها بدون إثبات لها.

مثال :

أوجد أبعاد النقط $A\ (-1, 0)$ ، $B(1,1)$، $C\ (-3, 5)$ من المستقيم $2x + 3y - 5 = 0$.

الحـــــل :

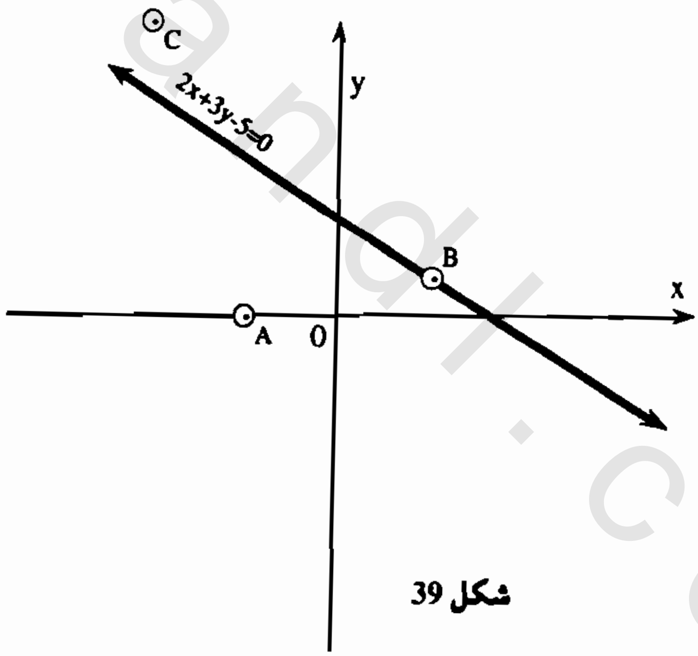
$$d_A = \frac{|2(-1) + 3\,(0) - 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|-7|}{\sqrt{13}} = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

$$d_B = \frac{|2\,(1) + 3\,(1) - 5|}{\sqrt{13}} = 0$$

$$d_C = \frac{|2\,(-3) + 3\,(5) - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{13}}$$

فعنـد تعويض الاحداثيات فى $2x + 3y - 5$ وجدنا النتائج , 0 , 4 +

7 - وهذه النتائج تدلنا على أن النقطه A تحت L، عليه C, B فوقه (شكله 39).



شكل 39

تمارين (15)

1- أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة A (1, 2) ويوازى المستقيم $x + 2y = 3$.

2- أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة A (-2, 2) والعمودى على المستقيم $2x + y = 4$.

3- أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطة A (1, 4) وزاوية ميله تساوى 60°.

3- ما هى زاوية ميل المستقيم $2x + y = 4$.

5 - عين احداثى النقطة P (x, y) بحيث يكون ميل المستقيم l_1 المار بها وبنقطة الأصل مساويا 2 + ويكون المستقيم L_2 المار بالنقطة A (-1, 0) وبالنقطة P (x, y) مساويا 1 +.

6- إثبت أن C (-2, 8), B (-2, 2), A (6, 2) هى رؤوس لمثلث قائم الزاوية ثم أوجد معادلة العمود النازل من رأس القائمة على القاعدة.

7- أوجد النقطة التى تقع على محور x بحيث يكون بعدها عن المستقيم $9x - 12y - 6 = 0$ مساويا 2.

8- أوجد معادلة المستقيم الذى يمر بالنقطتين $P_1(2, -1)$, $P_2(-3, 8)$

9- أوجد معادلة المستقيم الذى ميله 5 ويقطع جزءا من محور Y قدره -3

10 - إذا كانت معادلة المستقيم هى :

$$2x - 5y + 11 = 0$$

فأوجد الميل والجزء المقطوع من المحور Y.

11- أوجد إحداثيى نقطة تقاطع المستقيم الذى معادلته :

$2x + 3y = 3$

مع : a- المحور x .

b- المحور Y .

12- أثبت أن النقاط A (6, 2), B(-2, -2), C (-2, 8) هى رؤوس لمثلث متساوى الساقين ثم أوجد معادلة العمود النازل من رأس المثلث على القاعدة.

13- أوجد طول العمود النازل من النقطة A (2, 3) على المستقيم:

$5x - 12y + 10 = 0$

14- أوجد طول العمود النازل من القطة A (-2, -4) على المستقيم :

$12(x - 3) = y - 2$

15-أوجد طول العمود فى التمرين السابق بالقياس بيانيا.

16- أوجد البعد بين المستقيمين المتوازيين:

$3x + 4y - 13 = 0 \quad , \quad 6x + 8y + 15 = 0$

17- أوجد ساحة المثلث الذى رؤوسه هى النقاط :

A (2, -3) , B (4, -1) , C (8, 5)

18- أوجد بعد منتصف المسافة بين النقطتين A (3, 2) , B (5, 6) عن المستقيم:

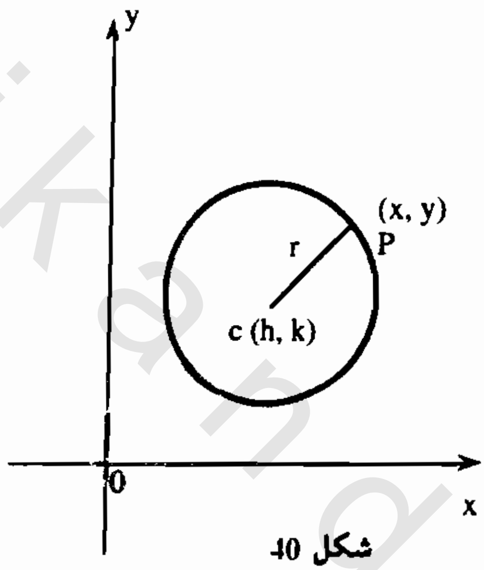
$7x - 24y + 5 - 0$

القطـــوع المخروطيـــة

1 - الدائـــــرة The Circle

تعريـــــف:

هى المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى المستوى بحيث تبعد بعدا ثابتا عن نقطة ثابتة تسمى المركز ويسمى هذا البعد الثابت نصف قطر الدائرة (شكل 40).



شكل 40

معادلة الدائرة :

تمثل النقطة $C\ (h, k)$ مركز الدائرة ، r نصف القطر والنقطة $P\ (x, y)$ أى نقطة على محيط الدائرة.

$$\therefore CP = r$$
$$= \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2}$$

بتربيع الطرفين:

$$\therefore (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \qquad (1)$$

المعادلة رقم (1) تمثل معادلة دائرة بدلالة احداثي المركز $C\ (h,\ k)$ ونصف القطر r.

مثال 1:

أوجد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها r.

الحـــل :

إحداثي المركز : $h = k = 0$

معادلة الدائرة هي $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

بالتعويض بإحداثي المركز في معادلة الدائرة:

$$\therefore (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$$

$$\therefore x^2 + y^2 = r^2$$

مثـــال 2:

أوجد معادلة الدائرة التي تمر بنقطة الأصل ومركزها $c\ (2,1)$

الحـــل:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

بالتعويض بإحداثي المركز في معادلة الدائرة:

$$\therefore (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = r^2$$

وحيث أن الدائرة تمر بنقطة الأصل

$$x = y = 0 \ \therefore$$

$$\therefore (0 - 2)^2 + (0 - 1)^2 = r^2$$

$$4 + 1 = r^2$$

$$5 = r^2$$

∴ معادلة الدائرة هى :-

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

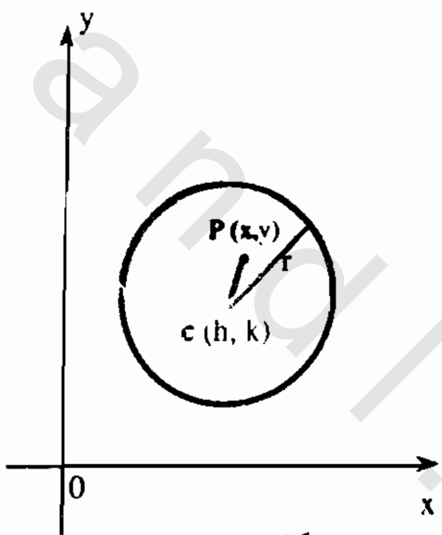
مثـــــال 3 :

ما هو المحل الهندسى للنقط P (x , y) التى تحقق احداثياتها المتباينة الآتية :-

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 < r^2$$

الحـــــل :

تتحقق المتباينة عندما وفقط عندما تكون النقطة P داخل الدائرة التى نصف قطرها r ومركزها C (h, k) (شكل 41)



شكل 41

مثـــال 4 :

ادرس تحليليا المعادلة الآتيه:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y = 12$$

الحـــــل :

يتم ترتيب كتابة المعادلة لتكون بهذه الصورة:

$$x^2 + 4x \quad + y^2 - 6y = 12$$

تستكمل المربعات للإحداثيات y , x جهة اليسار للمعادلة وما يتم إضافته جهة اليسار يضاف جهة اليمين لتصبح المعادلة بهذه الصورة:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = 12 + 4 + 9$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

تمثل هذه المعادلة معادلة دائرة مركزها $c\ (-2, 3)$ ونصف قطرها $r = 5$.

معادلة الدائرة فى الصورة العامة:

يمكن فك المعادلة رقم (1) لتصبح على الصورة الآتية:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0 \qquad (2)$$

وحيث أن $h, \ k, \ r$ ثوابت

إذا يمكن كتابة المعادلة السابقة على الصورة الآتية:

$$x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0 \qquad (3)$$

وهى تعبر عن معادلة الدائرة فى الصورة العامة حيث c_1 , c_2 , c_3 ثوابت يمكن إيجادها إذا علم أى من الشروط الآتيه:

1- ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة وتمر بها الدائرة.

2- ثلاث مستقيمات ليست متلاقية فى نقطة وليست متوازية وتمر الدائرة بنقط تقاطعهم.

3- تمس الدائرة مستقيمين وتمر بنقطة ليست على أى من المستقيمين.

ويلاحظ فى هذه المعادلة الآتى:

1- المعادلة من الدرجة الثانية فى x , y .

2- معامل $x\,y$ = صفر .

3- معامل x^2 = معامل y^2 .

مثال 5:

أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقاط الثلاث $A\ (1, 0)$, $B\ (0, 1)$, $D\ (2, 2)$

الحـــــل :

معادلة الدائرة هى : $x^2 + y^2 + c_1\, x + c_2\, y + c_3 = 0$

بالتعويض بالنقطة $A\ (1, 0)$ فى معادلة الدائرة:

$$\therefore\ 1 + 0 + c_1 + 0 + c_3 = 0$$

$$1 + c_1 + c_3 = 0 \qquad \text{I}$$

بالتعويض بالنقطة $B\ (0, 1)$ فى معادلة الدائرة:

$$0 + 1 + 0 + c + c_3 = 0$$

$$1 + c_2 + c = 0 \qquad \text{II}$$

بالتعويض بالنقطة $D\ (2, 2)$ فى معادلة الدائرة:

$$4 + 4 + 2\, c_1 + 2\, c_2 + c_3 = 0$$

$$8 + 2\, c_1 + 2\, c_2 + c_3 = 0 \qquad \text{III}$$

بطرح المعادلتين I , II

$$\therefore\ c_1 = c_2$$

نعوض عن قيمة c_2 فى المعادلة III

$\therefore\ 8 + 4\,c_1 + c_3 = 0$ IV

بطرح المعادلتين I , IV

$\therefore\ 7 + 3\,c_1 = 0$

$\therefore\ c_1 = -\dfrac{7}{3} = c_2$

بالتعويض عن قيمة c_1 فى المعادلة IV

$\therefore\ c_3 = -1 - c_1$

$= -1 + \dfrac{7}{3} = \dfrac{4}{3}$

∴ المعادلة المطلوبة هى :

$$x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x - \frac{7}{3}y + \frac{4}{3} = 0$$

وبالضرب X 3

$$\therefore\ 3x^2 + 3y^2 - 7x - 7y + 4 = 0$$

مثال 6 :

أوجد إحداثيى المركز ونصف قطر الدائرة فى المثال السابق.

الحـــل :

$c_1 = -2h \quad \rightarrow \quad \therefore\ h = \dfrac{c_1}{-2} = \dfrac{7}{6}$

$c_2 = -2k \quad \rightarrow \quad \therefore\ k = \dfrac{c_2}{-2} = \dfrac{7}{6}$

$c_3 = h^2 + k^2 - r^2$

$\dfrac{4}{3} = \dfrac{49}{36} + \dfrac{49}{36} - r^2$

$$\therefore r^2 = \frac{49 + 49 - 48}{36}$$

$$= \frac{50}{36}$$

$$r = \frac{5}{6}\sqrt{2}$$

∴إحداثى المركز $c\left(\frac{7}{6} , \frac{7}{6}\right)$

ونصف القطر $\frac{5}{6}\sqrt{2}$

مثـــال 7 :

أوجد إحداثى المركز ونصف قطر الدائرة التى معادلتها :-

$$Ax^2 + Ay^2 + D x + Ey + F = 0 \quad , \quad A \neq 0$$

الحـــل :

بقسمة المعادلة على A مع وضعها على الصورة :

$$x^2 + \frac{D}{A}x + y^2 + \frac{E}{A}y = \frac{-F}{A}$$

بإكمال المربع بالنسبة لـ x ,y وما يضاف جهة اليسار يضاف جهة اليمين

فتصبح المعادلة على الصورة :-

$$x^2 + \frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 + y^2 + \frac{E}{A}y + \left(\frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{-F}{A} + \left(\frac{D}{2A}\right)^2 + \left(\frac{E}{2A}\right)^2$$

$$\therefore \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}$$

بمقارنة المعادلة السابقة بمعادلة الدائرة رقم (1) يتضح الآتى :

$$h = \frac{-D}{2A} \quad , \quad k = \frac{-E}{2A}$$

$$r^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4\,AF}{4\,A^2}$$

∴ إحداثى المركز هو $C\left(\frac{-D}{2A} , \frac{-E}{2A}\right)$ ، نصف القطر r هو :

$$r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4\,AF}{4\,A^2}}$$

مثـــال 8 :

إذا كـان المسـتـقـيم الذى مـعـادلـتـه $2x - y + 4 = 0$ يقطع مـحـورى الاحداثيات فى النقطتين a , b فأوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط a , b , نقطة الأصل.

الحـــل :

لإيجاد نقطتى تقاطع المستقيم $2x - y + 4 = 0$ مع محورى الاحداثيات ، يتم التعويض $y = 0$ فى معادلة المستقيم لإيجاد نقطة تقاطعه مع المحور x كالآتى:

$2(x) - 0 + 4 = 0$

$2x = -4 \qquad \rightarrow \qquad x = -2$

∴ نقطة التقاطع هى $a\ (-2, 0)$ شكل42

ويتم التعويض عن $x = 0$ فى معادلة المستقيم لايجاد نقطة تقاطعه مع المحور y كالآتى :

$2(0) - y + 4 = 0 \qquad \rightarrow y = 4$

∴نقطة التقاطع هى $b\ (0 , 4)$ .... شكل 42

معادلة الدائرة هى $x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$

حيث أن الدائرة تمر بالنقطة (0, 0) فهى تحقق المعادلة :-

$\therefore (0) + (0) + (0) + (0) + c_3 = 0$

$\therefore c_3 = 0$

وحيث أن الدائرة تمر بالنقطة (0, 4) b فهى تحقق المعادلة :-

$\therefore 0 + 16 + 0 + 4c_2 = 0$

$\therefore c_2 = -4$

وحيث أن الدائرة تمر بالنقطة (0 ,2-) a . فهى تحقق المعادلة :-

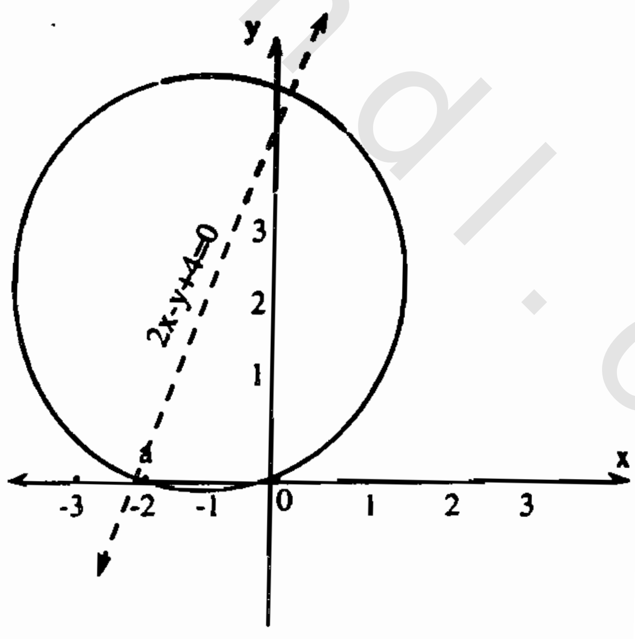
$\therefore 4 + 0 - 2\,c_1 - 4\,(0) = 0$

$\therefore 2\,c_1 = 4$

$c_1 = 2$

وبالتعويض عن قيم c_3 , c_2 , c_1 فى معادلة الدائرة فتصبح كالآتى:

$x^2 + y^2 + 2\,x - 4\,y = 0$



مثال 8 :

إثبت أن النقط (2- , 13-) f , (2 ,3)a ,(2, 5-)b ,(3 ,2) e تـكـون رؤوس شكل رباعي دائرى.

الحل :

نوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط a, b, e نعلم أن معادلة الدائرة هي:

$$x^2 + y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3 = 0$$

وحيث أن (3, 2) a تقع على محيط الدائرة فهى تحقق المعادلة :-

$$\therefore 9 + 4 + 3 c_1 + 2 c_2 + c_3 = 0$$

$$+ 3c_1 + 2 c_2 + c_3 = - 13 \qquad \text{I}$$

وحيث أن (5, -2) b تقع على محيط الدائرة. فهى تحقق المعادلة :-

$$\therefore 25 + 4 + 5 c_1 - 2c_2 + c_3 = - 0$$

$$\therefore \quad + 5 c_1 \quad - 2c_2 + c_3 = - 29 \qquad \text{II}$$

وحيث أن (2, 3) e تقع على محيط الدائرة فهى تحقق المعادلة :-

$$\therefore 4 + 9 + 2 c_1 + 3 c_2 + c_3 = 0$$

$$\therefore \qquad + 2 c_1 + 3 c_2 + c_3 = -13 \qquad \text{III}$$

لإيجـاد معـادلة الدائرة التى تمر بالنقط a, b, e ، يتم حل المعـادلات ,III ,II ,I بإستخدام المحددات كالآتى:-

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 (-2 -3) \; -5 (2 - 3) + 2 (2+ 2)$$

$$= -2$$

$$\Delta C_1 = \begin{vmatrix} -13 & 2 & 1 \\ -29 & -2 & 1 \\ -13 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -13(-2-3) + 29(2-3) - 13(2+2)$$

$$= -16$$

$$\Delta C_2 = \begin{vmatrix} 3 & -13 & 1 \\ 5 & -29 & 1 \\ 2 & -13 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-29+13) - 5(-13+13) + 2(-13+29)$$

$$= -16$$

$$\Delta C_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -13 \\ 5 & -2 & -29 \\ 2 & 3 & -13 \end{vmatrix}$$

$$= 3(26+87) - 5(-26+39) + 2(-58-26)$$

$$= 106$$

$$\therefore C_1 = \frac{\Delta C_1}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$C_2 = \frac{\Delta C_2}{\Delta} = \frac{-16}{-2} = 8$$

$$C_3 = \frac{\Delta C_3}{\Delta} = \frac{106}{-2} = 53$$

نعوض عن C_1, C_2, C_3 فى معادلة الدائرة التى تكون كالآتي:-

$$x^2 + y^2 + 8x + 8y - 53 = 0$$

نعــوض عـن النقطة الرابعــة وهى (2- , 13-) f فـى مــعــادلة الدائرة فــإذا حققتها فإن الدائرة تمر بها وإن لم تحققها فإن الدائرة لا تمر بها :

$\therefore\ 169 + 4 + 8\,(-13) + 8\,(-2) - 53$

$= 0$

$\therefore$ النقطة (2- ,13-) f تحقق أيضا معادلة الدائرة.

$\therefore$ f, e, b, a تقــع على دائرة واحـــدة، وبالتــالى تكـون رؤوس شــكل رباعى دائرى.

تماريـــــن (16)

1- أوجد معادلة الدائرة التى مركزها $c\ (h, k)$ ونصف قطرها r لكل من:-

a- $r = 2$, $c\ (0, 2)$

b- $r = \sqrt{6}$, $c\ (-2, -1)$

2- أوجد مركز ونصف قطر الدائرة لكل من المعادلات الآتيه:

a- $x^2 - y^2 - 2y = 3$

b- $x^2 + y^2 + 2x = 8$

c- $3x^2 + 3y^2 + 6x = 1$

d- $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$

e- $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 9 = 0$

f- $2x^2 + 2y^2 + x + y = 0$

3- أوجد معادلة الدائرة التى مركزها $c\ (2, 2)$ وتمر بالنقطة $A\ (4, 5)$

4- أوجد معادلة الدائرة التى مركزها $c\ (-1, 1)$ وتمس المستقيم:

$x + 2y = 4$

5- أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط $E\ (-4, 3)$, $A\ (2,3)$, $B\ (3,2)$.

6- أوجد معادلة الدائرة التى تمر بنقطة الأصل وبالنقطة $A\ (0, 2)$ ويقع مركزها على المستقيم الذى معادلته $2x + 7y = 14$.

7- أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقط $B\ (1, -4)$, $A\ (-1, -2)$, $E\ (-3, -2)$.

8 - أوجد معادلة الدائرة التى تمر بالنقطتين $B\ (6, 8)$, $A\ (-1, 4)$, E ويقع مركزها على المستقيم المار بالنقطتين $D\ (1, 2)$, $E\ (1, 1)$.

9 - أثبت أن النقط $A\ (1, 5)$, $B\ (4, 2)$, $D(-2, 2)$, $E\ (1, -1)$ تكون رؤوس شكل رباعى دائرى.

10 - أوجد المحل الهندسى للنقطة $P\ (x, y)$ إذا كان مجموع مربعى بعديها عن النقطتين $A\ (-5, 2)$, $B\ (1, 4)$ مساويا لـ 52 بين نوع هذ المنحنى.

11 - هل النقطة $A\ (0.1\ ,\ 3.1)$ تقع داخل الدائرة $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 3 = 0$ أم خارجها أم عليها ولماذا ؟

12 - إذا كان بعد النقطة $P\ (x, y)$ عن النقطة $B\ (6\ ,\ 0)$ هو ضعف بعدها عن النقطة $A\ (0, 3)$ فأثبت أن المحل الهندسى لهذه النقطة هو عبارة عن دائرة، ثم أوجد مركز هذه الدائرة ونصف قطرها.

13 - أوجد معادلة الدائرة المحاطة بمثلث أضلاعه هى :

$$4x + 3y = 24$$

$$3x - 4y = 18$$

$$4x - 3y + 32 = 0$$

(إرشاد : بعد النقطة (h, k) عن المستقيم $Ax + By + C = 0$ هو:

$$\frac{|A h + B k + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

14 - لتكن P نقطة خارج دائرة معينة C وليكن PT مماسا لهذه الدائرة فىT فإذا قطع المستقيم PN الذى يمر بمركز C هذه الدائرة فى N, M فأثبت أن:

$$PM.\ PN = (PT)^2$$

15 - أوجد معادلة الدائرة التى تمر بنقطة الأصل وتقطع طولين موجبين من محورى الإحداثيات مقدارهما 6 , 4 على الترتيب.

16 - أوجد معادلة الدائرة التى مركزها $c\ (2\ ,\ 3)$ وتقطع من محور x جزءا طوله 8 وحدات .

17- أوجد معادلة الدائرة التى مركزها $c\ (2\ ,\ 3)$ وتمس المحور x.

2 - القطع المكافئ The parabola

تعريـــــف:

القطع المكافئ هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو معلوم بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة فيه (البؤرة) يساوى بعدها عن مستقيم ثابت فى المستوى (الدليل).

والمستقيم المار بالبؤرة وعموديا على الدليل يسمى محور القطع كما تسمى نقطة تقاطع المحور مع القطع رأس القطع.

المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ:

لإيجاد المعادلة الكارتيزية للقطع المكافئ فى أبسط صورة نفرض أن البؤره S والدليل l.

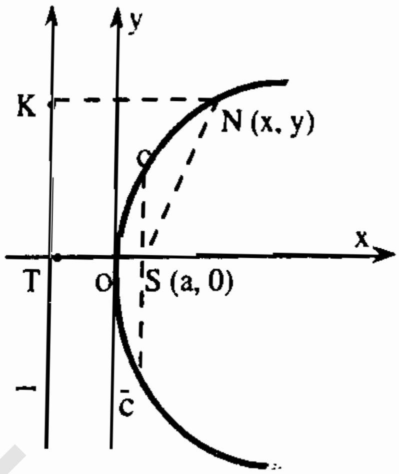
ونعتبر المحور x هو العمودى من S على l الذى يقطع القطع فى النقطة 0. ومن النقطة 0 نرسم المحور Y.

نفرض أن بعد البؤرة S عن الدليل = 2a.

∴ من تعريف القطع يكون :

$$T0 = S0$$

إحداثيى البؤرة S(a, 0) شكل 43.



شكل 43

معادلة الدليل هى :

$$x = -a$$
$$x + a = 0$$

فإذا كانت N (x, y) أى نقطة على القطع المكافئ فإن :

$$NS = NK$$

$$\therefore \sqrt{(x-a)^2 + (y-0)^2} = x + a$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$\therefore y^2 = 4ax \text{ ....} \qquad (1)$$

تسمى المعادلة (1) معادلة القطع المكافئ فى أبسط صورها.

ملاحظات :

1- المنحنى متماثل بالنسبة للمحور x.

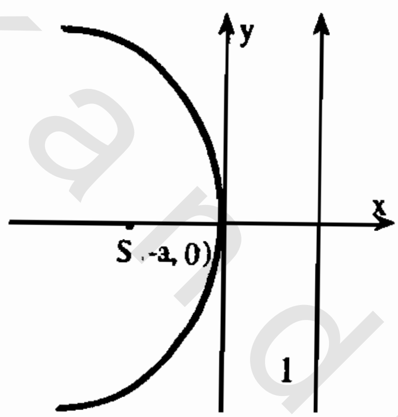
2-رأس القطع هى نقطة أصل المحورين (تقاطع المحورين).

3 - الوتر المار بالبؤرة عموديا على محور القطع يسمى الوتر البؤرى العمودى ويساوى 4 a.

4- لا وجود للمنحنى عندما تكون x سالبة.

5- بزيادة قيمة x تزداد قيمة y.

6- إذا كانت a سالبة فإن قيم x يجب أن تكون سالبة أى تكون فتحة القطع نحو الاتجاه السالب للمحور x شكل 44.

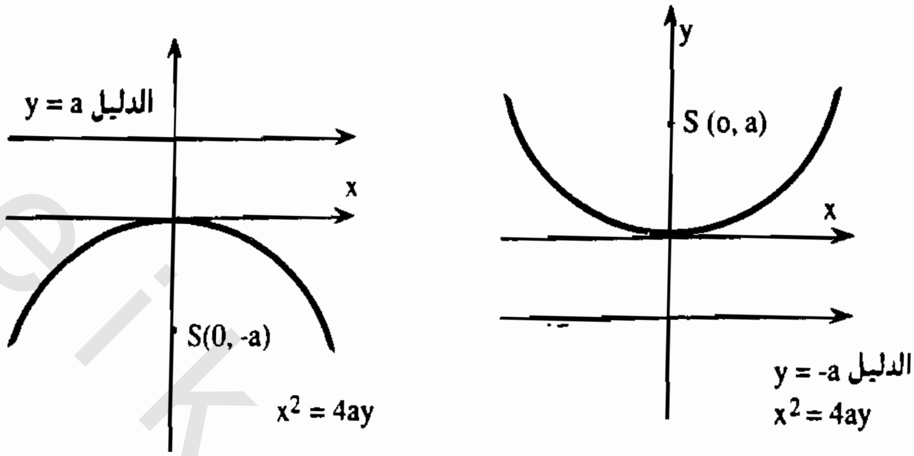


شكل 44

7 - معادلة القطع المكافئ الذى محوره رأسى هو :

$$x^2 = \pm a\, y$$

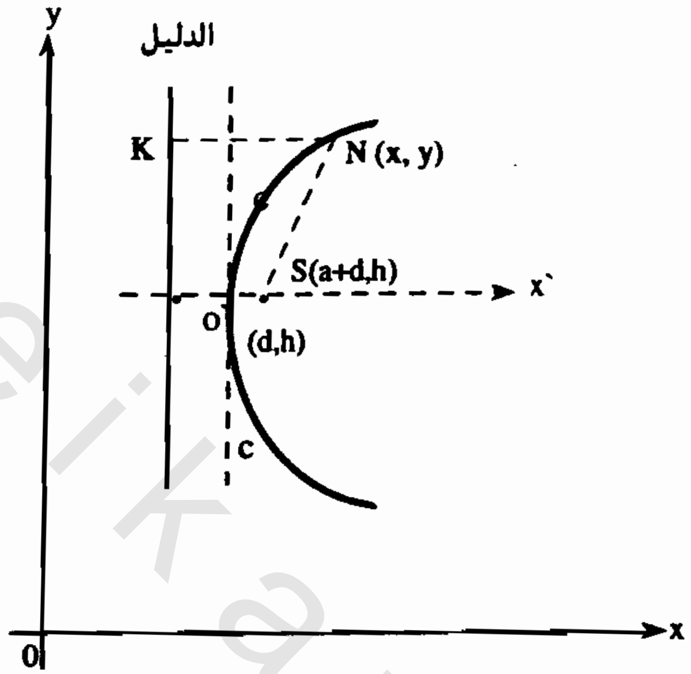
وذلك كون القطع مفتوحاً إلى أعلى أو إلى أسفل . شكل 45.



شكل 45

معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي المحور x :

إذا كانت رأس القطع هي النقطة P (d, h) فينتقل نقطة الأصل (0, 0) 0 إلى النقطة P (d, h) مع بقاء المحورين موازيين لوضعهما الأصلي. شكل 46



شكل 46

تصبح معادلة القطع بالنسبة للمحورين `x , `y هى:

$$y'^2 = 4a\, x'$$

$$,\ \therefore x' = x - d$$

$$y' = y - h$$

$$\therefore (y - h)^2 = 4\, a\, (x - d)$$

والمعادلة الأخيرة هى معادلة القطع المكافئ الذى محوره يوازى المحور x

ورأسه هى النقطة (d, h) `0 ويلاحظ الآتى:-

1- رأس القطع هى النقطة (d,h) `0

2- إحداثيى البؤرة (d + a , h) s

3- معادلة محور القطع هى : x = h

4- معادلة الدليل هى : $x = d - a$

5- طول الوتر البؤرى العمودى = $4a$

مثال 1 :

إذا كان : $5y^2 = 12x$ أوجد ما يأتى:

أولا: إحداثيى البؤرة للقطع المكافئ

ثانيا: معادلة الدليل

ثالثا: طول الوتر البؤرى العمودى

الحل :

$$5y^2 = 12x$$

$$y^2 = \frac{12}{5}x$$

$$\therefore 4a = \frac{12}{5}$$

$$\therefore a = \frac{3}{5}$$

∴ البؤرة هى النقطة $S\left(\frac{3}{5}, 0\right)$

معادلة الدليل هى :

$$x = -\frac{3}{5}$$

طول الوتر البؤرى العمودى:

$$= \frac{12}{5}$$

مثال 2 :

في القطع المكافئ: $y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$

أوجد ما يأتي:

أولا: إحداثيي رأس القطع

ثانيا: إحداثيي البؤرة

ثالثا: طول الوتر البؤرى العمودى

رابعا: معادلتي كل من دليل القطع ومحوره.

الحل:

$$y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$$

بإكمال المربع في y

$$\therefore y^2 - 6y + 9 = -8x - 8$$

$$\therefore (y-3)^2 = -8(x+1)$$

$\therefore$ إحداثيى رأس القطع ، $0'(-1, 3)$ $a = -2$,

إحداثيي البؤرة هما $S(-3, 3)$

طول الوتر البؤرى العمودى $|4a| = 8$

معادلة الدليل هى : $x = 1$

معادلة المحور هى : $y = 3$

مثال 3 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذى بؤرته $s\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ ومعادلة دليله هى : $y - \frac{4}{3} = 0$ ثم أوجد طول وتره البؤرى العمودى.

الحل:

نفرض $N(x, y)$ على القطع

∴من تعريف القطع يكون :

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y+\frac{4}{3})^2} = y - \frac{4}{3}$$

$$\therefore x^2 + y^2 + \frac{8}{3}y + \frac{16}{9} = y^2 - \frac{8}{3}y + \frac{16}{9}$$

$$\therefore x^2 = -\frac{16}{3}y$$

وهى معادلة القطع

طول الوتر البؤرى العمودى = $|4a| = \frac{16}{3}$

مثال 4:

أوجد معادلة القطع الذى بؤرته $S(2, 3)$ ودليله المستقيم الذى معادلته :

$x - 4y + 3 = 0$

الحل :

نفرض $N(x , 1)$ على القطع

$$\therefore \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2} = \frac{x - 4y + 3}{\sqrt{1 + 16}}$$

$$\therefore 17(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = x^2 - 8xy + 6x + 16y^2 - 24y + 9$$

$$\therefore 16x^2 + y^2 - 74x - 78y + 8xy + 212 = 0$$

وهى معادلة القطع

مثال 5 :

أوجد معادلة القطع المكافئ الذى رأسه هو النقطة (3, 4) O ويؤرته هى النقطه S (5, 4)

الحـــــل :

$\therefore a = 5 - 3 = 2$

$\therefore$ معادلة القطع هى :

$$(y - 4)^2 = 4\ (2)\ (x - 3)$$

$$\therefore\ y^2 - 8y - 8\,x + 40 = 0$$

وهى معادلة القطع.

تماريــــــن (17)

1- أوجد إحداثيى البؤرة وطول الوتر البؤرى العمودى ومعادلة الدليل لكل قطع مكافئ مما يأتى:

a) $y^2 = 8x$

b) $x^2 = 8y$

c) $3y^2 = 4x$

2- أوجد معادلة كل قطع مكافئ إذا كان :

a) إحداثيى البؤره $S(3, 0)$ ومعادلة الدليل: $x + 3 = 0$

b) إحداثيى البؤرة $S(0, 6)$ ودليله هو المحور x

3- أوجد طول الوتر البؤرى العمودى من القطع المكافئ:

$y^2 + 3x = 4$

4- أوجد طول الوتر البؤرى العمودى من القطع المكافئ :

$3y^2 - x - 18y + 27 = 0$

5- أوجد طول الوتر البؤرى العمودى من القطع المكافئ:

$x^2 - 4x - 8y - 12 = 0$

6 - أوجد إحداثيى كل من الرأس والبؤرة وكذلك معادلة الدليل للقطع المكافئ : $y^2 = 2x + 3$

7- أوجد إحداثيى كل من الرأس والبؤرة ومعادلة الدليل وطول الوتر البؤرى العمودى لكل قطع مكافئ مما يأتى:

a) $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$

b) $3x^2 - 9x - 5y - 2 = 0$

3- القطع الناقص The ellipse

تعريف : القطع الناقص هو المحل الهندسى للنقط $P(x, y)$ التى مجموع بعديها عن نقطتين معلومتين ثابت (شكل 47).

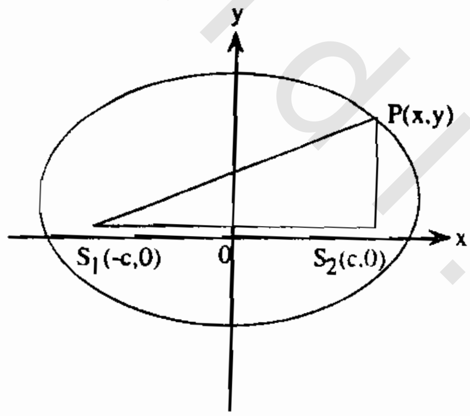
معادلة القطع الناقص:

إذا أخذنا النقطتين المعلومتين (البؤرتين) $S_1(-c, o)$, $S_2(c, o)$ وكان

$$PS_1 + PS_2 = 2a$$

فإن إحداثيات النقطة P يجب أن تحقق المعادلة الآتيه :

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$



القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

شكل 47

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

وبتربيع الطرفين

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 - 4a\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a - \frac{c}{a}x$$

وبتربيع الطرفين

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

$$x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) + y^2 = a^2 - c^2$$

وبقسمة الطرفين على $a^2 - c^2$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \qquad (1)$$

$$, \quad \therefore 2a = PS_1 + PS_2$$

$$\therefore 2a > 2c$$ (مجموع أى ضلعين أكبر من الضلع الثالث)

$$\therefore a^2 - c^2 > 0$$

$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$b = \sqrt{a^2-c^2} \qquad (2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (3)$$

ولإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحور x :

$$\therefore\ y = 0$$
$$\therefore\ x^2 = a^2$$
$$x = \pm\, a$$

ولإيجاد نقط تقاطع المنحنى مع المحور y :

$$\therefore\ x = 0$$
$$y^2 = b^2$$
$$y = \pm\, b$$

وبإجراء التفاضل للمعادله (3)

$$\frac{2\,x}{a^2} + \frac{2\,y}{b^2}\ \frac{d\,y}{d\,x} = 0$$

$$\therefore\ \frac{d\,y}{d\,x} = -\ \frac{b^2\,x}{a^2\,y^2}$$

وعندما $\frac{d\,y}{d\,x} = 0$

$$\therefore\ x = 0 \quad , \quad y = \pm\, b$$

وعندما $\frac{d\,x}{d\,y} = 0$

$$\therefore\ y = 0 \quad , \quad x = \pm\, a$$

∴ المنحنى يقطع المحورين على التعامد.

لقد أثبتنا أنه إذا حققت النقطة P الشرط الهندسى

$$PS_1 + PS_2 = 2\,a$$

فإن إحداثياها (x , y) يحققا المعادلة (3) . وإذا حدث العكس أي إذا

حققت x , y المعادلة (3) عند $a > , > 0$ فإن :

$$\frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$y^2 = (a^2 - c^2)\,\frac{a^2 - x^2}{a^2}$$

$$, \because\ PS_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$$

$$\therefore\ PS_2 = \sqrt{x^2 + 2c\,x + c^2 + a^2 + (\frac{c}{a}\,x)^2 - c^2 - x^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + 2\,c\,x + (\frac{c}{a}\,x\,)^2}$$

$$= \sqrt{(\,a + \frac{c}{a}\,x\,)^2} = \left|a + \frac{c}{a}\,x\right| \qquad ....4\text{-a}$$

وبالمثل

$$PS_2 = \sqrt{(a - c)^2 + y^2} = \left|a - \frac{c}{a}\,x\right| \qquad ....4\text{-b}$$

حيث أن مجال x هو : $-a \leq x \leq a$

فإن قيمة $(\frac{c}{a}\,x)$ مجالها هو : $-c \leq \frac{c}{a}\,x \leq c$

وبنا ا على ذلك فـإن كـلا من $a + \frac{c}{a}\,x \quad , \quad a - \frac{c}{a}\,x$ مـوجب وتقع

قيمتهما بين $a + c$, $a - c$

وبذلك ينتج عن القيم المطلقة فى$a - 4$, $b - 4$ أن :-

$$PS_1 = a + \frac{c}{a}x \quad , \quad PS_2 = a - \frac{c}{a}x$$

أي أن :

$$PS_1 + PS_2 = 2a$$

بغض النظر عن موضع النقطة $P(x, y)$ على المنحنى.

بما أن المقدار $b^2 = a^2 - c^2$ فى المعادلة (3) أقل من a^2 إذن فالمحور الكبير للقطع الناقص هو عبارة عن القطعة المستقيمة التى طولها $2a$ والواقعه بين النقطتين $(\pm a, 0)$، أما المحور الصغير فهو عبارة عن القطعة المستقيمة التى طولها $2b$ والواقعة بين النقطتين $(0, \pm b)$. وعلى ذلك يكون نصف المحور الكبير = a ، نصف المحور الصغير = b.

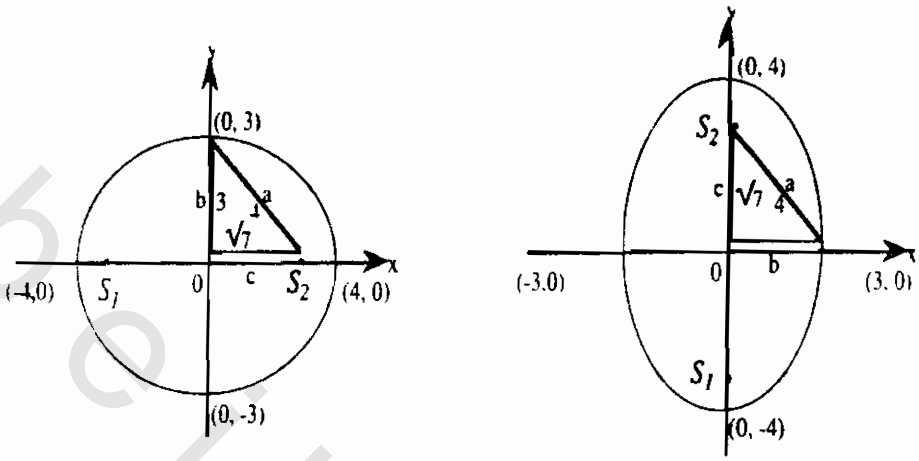
فمثلا إذا كان : $a = 4$, $b = 3$ فإن المعادلة (3) تصبح:-

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

وإذا تبادلا وضعا المحاور فإن :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$

وفى هذه الحالة يصبح المحور الكبير رأسيا. شكل 48.



أ) المحور الكبير لـ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ أفقيا.

ب) المحور الكبير لـ $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ رأسيا.

شكل 48

لاحظ أن البؤرتين تقعا دائما على المحور الكبير وأن :

$$a^2 = b^2 + c^2$$

أى أن a وتر المثلث القائم وأن وضع البؤرتين فى المثال على بعد $\sqrt{7}$ من المركز.

المركز ليس عند نقطة الأصل :

يعرف مركز القطع الناقص بأنه نقطه تقاطع محورى تناظره فإذا كان المركز c (h, k) والمحوران يوازيان المحورين x , y فإنه يمكننا إقتراح إحداثيات جديدة.

$$x` = x - h \qquad , \quad y` = y - k$$

حيث c هى نقطة الأصل `0 للاحداثيات الجديدة فتكون المعادلة فى

الاحداثيات الجديدة هى :

$$\frac{x`^2}{a^2} + \frac{y`^2}{b^2} = 1$$

أو

$$\frac{x`^2}{b^2} + \frac{y`^2}{a^2}$$

تبعا لوضع المحور الأكبر ويوضح ذلك المثال التالى.

مثال : حل المعادلة

$$9x^2 + 4y^2 + 36x - 8x - 8y + 4 = 0$$

الحـــل :

نكمل المربعات

$$9(x^2 + 4x) + 4(y^2 - 2y) = -4$$

$$\therefore 9(x^2 + 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -4 + 36 + 4$$

$$\therefore \frac{(x+2)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$\therefore x` = x + 2 \quad , \quad y` = y - 1$$

وبذلك نرى أن نقطة الأصل الجديدة $x` = 0$ , $y` = 0$ هى نفسها النقطة:

$x = -2$, $y = 1$

وتصبح المعادلة فى المحاور الجديدة

$$\frac{x`^2}{4} + \frac{y`^2}{9} = 1$$

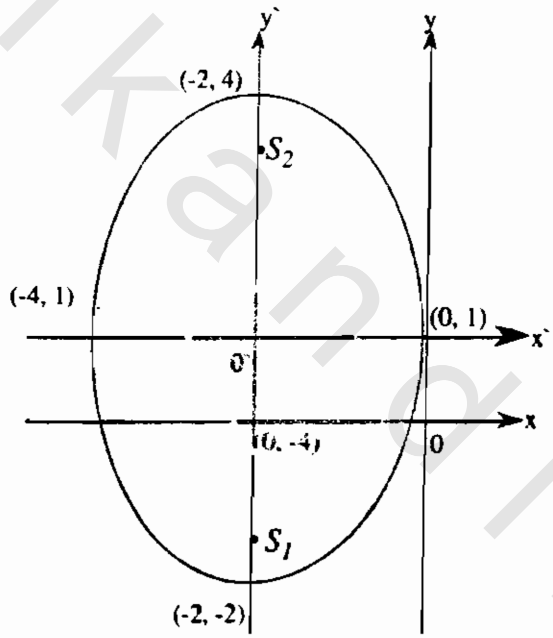
التى تمثل قطعا ناقصا يقطع المحور `y في (3 ± , 0) , `x فى (0 ,2±) لتحديد موضع البؤرتين نستعمل العلاقة:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$= \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

وبالتالى تقع البؤرتان على المحور `y عند $(0\ ,\ \pm\sqrt{5})$

أو عند $(-2,\ 1 \pm \sqrt{5})$ للإحداثيات الأصيلة. ويوضح ذلك شكل 49.

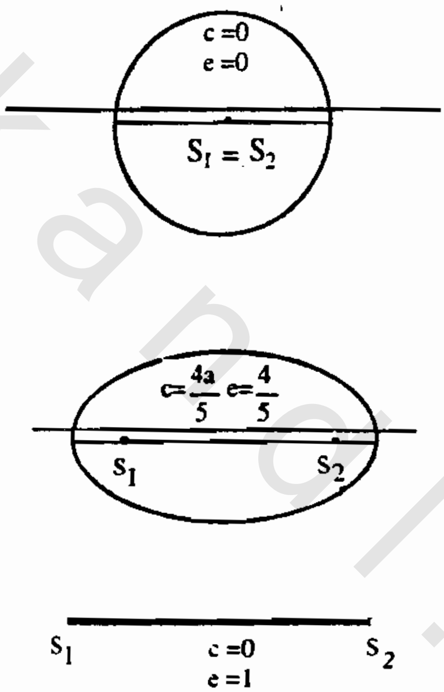


شكل 49

الاختلاف المركزى:

إذا ثبتنا a وغيرنا c فى المدى $a \leq c \leq 0$ فإن القطوع الناقصة الناتجة

تختلف فى أشكالها، فهى عبارة عن دائرة عندما $c = 0$ ثم يأخذ جانبها فى الاتساع كلما زادت c إلى أن تصل إلى الحالة النهائية عندما $c = a$ حيث يؤول «القطع الناقص» عندئذ إلى القطعة المستقيمة $S_1 \ S_2$ الواصلة بين البؤرتين كما فى الشكل (50). تسمى النسبة $e = \frac{c}{a}$ الاختلاف المركزى والتى تأخذ قيم من 0 إلى 1 وتدل على مدى بعد المنحنى عن الشكل الدائرى.



شكل 50

من المعروف أن للقطع المكافئ بؤرة واحدة ودليل واحد بينما لكل قطع ناقص بؤرتان ودليلان، ودليلا القطع الناقص هما مستقيمان عموديان على المحور

الكبير للقطع الناقص ويبتعدان عن مركزه مسافة $\pm \frac{a}{e}$.

بالنسبة للقطع المكافئ العلاقة:

$$PS = PD$$

لأى نقطة P عليه حيث S البؤرة، D هى أقرب نقطة لـ P على الدليل

وأيضا فى حالة القطع الناقص يمكن إثبات أن :

$$PS_1 = e.PD_1 \quad , \quad PS_2 = e\, PD_2$$

حيث e الاختلاف المركزى، P أى نقطة على القطع الناقص S_1, S_2

البؤرتان، D_1 , D_2 هما أقرب نقطتين على الدليلين $x = \pm \frac{a}{e}$.

تمارين (18)

1- أوجد معادلة القطع الناقص الذى مركزه c وبؤرته S ونصف محوره الكبير a وأوجد اختلافه المركزى فى كل من :-

(a)	$a = 4$	, c (0 ,0)	, S (0, 2)
(b)	$a = 5$	, c (0 ,0)	, S (-3 , 1)
(c)	$a=3$	, c (0, 2)	, S (0, 0)
(d)	$a = 4$	, c (-3, 0)	, S (-3, -2)
(e)	$a = \sqrt{10}$	, c (2, 2)	, S (-1, 2)

2- أوجد مركز القطع الناقص $25 x^2 + 9 y^2 - 100 x + 54 y - 44 = 0$ ثم أوجد أيضا رأسيه وبؤرتيه.

3- رؤوس المحور الكبير والمحور الصغير لقطع ناقص هى , (1 , 1) ,(3, 4), (-1, 4), (1, 7). أوجد معادلته وبؤرته.

4- أوجد معادلة القطع الناقص الذى يمر بنقطة الأصل وتقع بؤرتاه فى النقطتين (1 ,1) , (-1, 1).

5- أوجد الاختلاف المركزى والدليلين للقطع الناقص $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$

6 - أوجد طول الوتر العمودى على المحور الكبير للقطع الناقص $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ ويمر بإحدى البؤرتين. (يسمى هذا الوتر بالخط البؤرى العمودى

للقطع الناقص).

7 - أوجد معـادلة القطع الناقص الذى اختـلافه المركزى هو $\frac{2}{3}$ واحد دليله هو المستقيم $x = 9$ وبؤرته الموافقه لهذا الدليل هى $(4 , 0)$.

8 - أثبت أن معـادلة المـماس للقطـع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ عند النقطة $P_1(x_1 , y_1)$ الواقعة عليه هى :

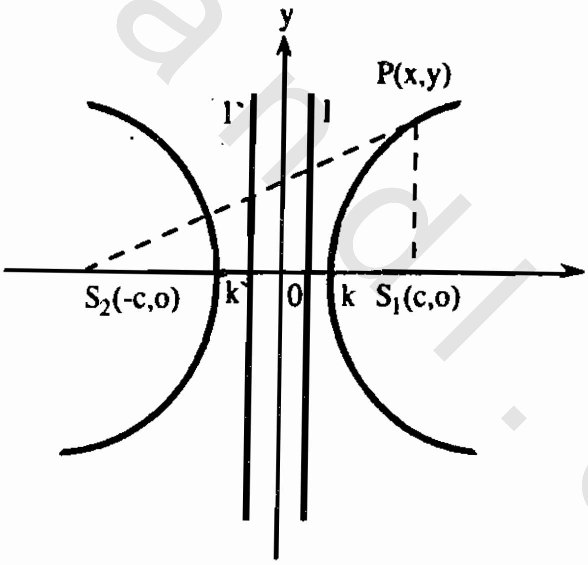
$$\frac{x\,x_1}{a^2} + \frac{y\,y_1}{b^2} = 1$$

4- القطع الزائد The hyperbola

تعريف: القطع الزائد هو المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو بحيث يكون الفرق بين بعديها عن نقطتين ثابتتين فيه مقدارا ثابتا والنقطتان الثابتتان تسميان بالبؤرتين.

إيجاد المعادلة الكارتيزية للقطع الزائد فى الصورة القياسية:

نفرض أن النقطتين الثابتتين هما : $S_1\ (c, 0)$, $S_2\ (-c, 0)$ وأن P (x, y) تتحرك فى مستوى S_1 , S_2 (شكل 51).



شكل 51

$\therefore PS_2 - PS_1 =$ = مقدار ثابت = 2a

$\therefore a < c$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

$$\therefore \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

بالتربيع والاختصار ينتج أن:

$$cx - a^2 = \sqrt{a\,(x-c)^2+y^2}$$

بالتربيع مرة أخرى ينتج أن :

$$(c^2-a^2)\,x^2 - a^2\,y^2 = a^2\,(c^2-a^2)$$

وبقسمة الطرفين على $a^2\,(c^2-a^2)$ ينتج أن :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2-a^2} = 1$$

$$\because c > a$$

$$\therefore c^2 - a^2 > 0$$

$$\because c^2 - a^2 = \text{ثابت} = b^2$$

$$\therefore \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هذه هى معادلة القطع الزائد

ملاحظات :

1- المنحنى متماثل بالنسبة لكل من محورى الاحداثيات y , x

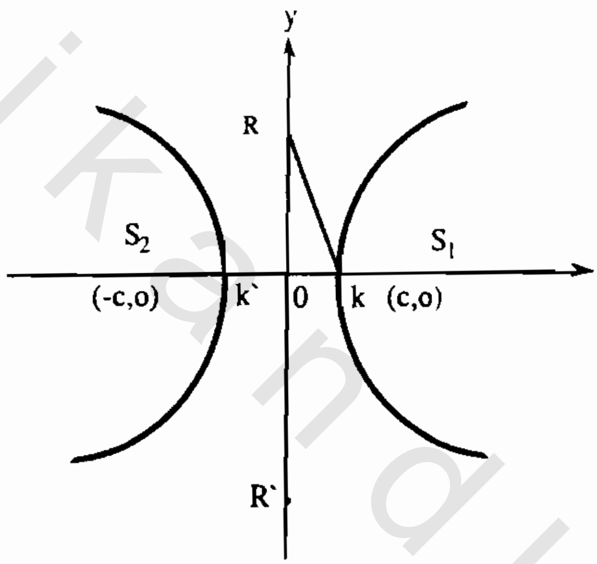
2 - مركز القطع هو نقطة الأصل (0 , 0) وهى نقطة منتصف المسافة بين البؤرتين.

3 - المنحنى يقطع محور x فى النقطتين:

$k\ (a\ ,\ 0)\ ,\ k`\ (-a\ ,\ 0)$

ويسمى $k\ k`$ المحور القاطع وطوله $= 2\ a$

4 - $b = OR` = OR$ يسمى المحور المرافق ويلاحظ أنه لا يقع على القطع (شكل 52).



شكل 52

5 - إحداثيا البؤرتين هما $S_1\ (c,\ 0)\ ,\ S_2\ (-c\ ,\ 0)$

6 - الاختلاف المركزى e :

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

ويلاحظ أن : $e > 1$

7 - معادلتا الدليلين : $l\ ,\ l`$ هما :

$$x = \pm \frac{a}{e}$$

8- إذا وقعت البؤرتان على محور y تكون معادلة القطع الزائد فى هذه الحالة هى :

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

تكون معادلتا الدليلين `l , l هما :

$$y = \pm \frac{a}{e}$$

وتكون إحداثيات البؤرتين هما :

$S_1 (0 , c), S_2 (0 , -c)$

9 - طول الوتر البؤرى العمودى للقطع $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ يساوى

$$= \frac{2 b^2}{a}$$

10 - معادلة القطع الزائد الذى مركزه `0 (d , h) ومحوره القاطع يوازى المحور x هى:

$$\frac{(x - d)^2}{a^2} - \frac{(y - h)^2}{b^2} = 1$$

11 - معادلة القطع الزائد الذى مركزه `0 (d, h) ومحوره القطع يوازى المحور y هى :

$$\frac{(y - d)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1$$

12 - التمثيل البارامتري للقطع الزائد:

يتم التعويض عن الاحداثيات x , y كالآتى:

$$x = a \quad \sec\theta$$
$$y = b \quad \tan\theta$$

13 - معادلة المماس : عند النقطة $P_1\ (x_1\ ,\ y_1)$ هى :

$$x x_1 / a^2 \ - \ yy_1 / b^2 = 1$$

14 - القطع الزائد القائم: هو قطع زائد محوراه متساويان أي أن $a = b$ فتصبح معادلة القطع الزائد هى :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$\therefore\ x^2 - y^2 = a^2$$

ويلاحظ أن :

1 - طول محوره القاطع = طول محوره المرافق.

2 - اختلافه المركزى = $\sqrt{2}$.

مثال 1 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع يقع على محور الصادات ويمر بالنقطتين $P_1\ (4,6)$, $P_2\ (1,-3)$.

الحـــل :

$\because$ المحور القاطع يقع على المحور Y

$\therefore$ معادلة القطع هى : $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

بالتعويض بالنقطتين P_1 , P_2 فى معادلة القطع:

$$\therefore \frac{36}{a^2} - \frac{16}{b^2} = 1$$

$$\therefore 36\, b^2 - 16\, a_2 = a^2 - b^2 \qquad (1)$$

$$, \because \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$$

$$\therefore 9\, b^2 - a^2 = a^2\, b^2 \qquad (2)$$

وبحل المعادلتين (1) , (2)

$$\therefore b^2 = 4 \quad , \quad a^2 = \frac{36}{5}$$

∴معادلة القطع هى :

$$\frac{5\, y^2}{46} - \frac{x^2}{4} = 1$$

مثـــــال 2 :

اكتب معادلة القطع الزائد $9\, x^2 - 16\, y^2 = 144$: فى الصورة القياسية

ثم أوجد :

(1) احداثيى رأسيه. (2) معادلتى الدليلين.

(3) طولى محوريه القاطع والمرافق (4) الاختلاف المركزى

(5) طول وتره البؤرى العمودى (6) إحداثيى بؤرتيه.

الحـــل:

$$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore a = 4 \quad , \quad b = 3$$

$$, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$$

رأس القطع هما : $k^{`}(0, -4)$, $k(0, 4)$

البؤرتان هما : $S_2(0, -5)$, $S_1(0, -5)$

الاختلاف المركزى:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

طول المحور القاطع :

$$= 2a = 2(4) = 8$$

طول المحور المرافق:

$$= 2b = 2(3) = 6$$

معادلتا الدليلين هما :

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{4}{5/4} = \pm \frac{16}{5}$$

طول الوتر البؤرى العمودى :

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{4} = \frac{9}{2}$$

مثال 3 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذى طول محوره المرافق = 6وطول وتره البؤرى العمودى =2 إذا كان محوراه منطبقين على محورى الأحداثيات.

الحـــــل :

طول المحور المرافق = 6

$$\therefore 2b = 6$$

$$\therefore b = 3$$

طول الوتر البورى العمودى = 2

$$\therefore\ 2 = \frac{2b^2}{a}$$

$$a = \frac{2\,(9)}{2} = 9$$

∴ معادلة القطع الزائد هى :

$$\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$$

مثال 4 :

أوجد معادلة القطع الزائد الذى إحداثيى بؤرتيه $s(0, \pm 3)$ وطول محوره المرافق = 5

الحـــــل :

البؤرتان تقعان على المحور y

$$\therefore\ \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$c = 3 \qquad , 2\,b = 5$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = 9 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{11}{4}$$

∴ معادلة القطع هى:

$$\frac{4\,y^2}{11} - \frac{4\,x^2}{25} = 1$$

مثـــال 5 :

أوجـد مـعـادلة القطع الزائد الذى مركـزه نقطة الأصل ومـحـوره القـاطع على المحور x واختلافه المركزى $e = \frac{\sqrt{7}}{2}$ إذا علم أن طول وتره البؤرى العمودى = 6

الحـــل :

$$e = \frac{\sqrt{7}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

$$7a^2 = 4(a^2 + b^2)$$

$$3a^2 = 4b^2 \qquad (1)$$

$$\therefore 6 = \frac{2b^2}{a} = \frac{3a^2}{2a}$$

$$\therefore a^2 = 16$$

$$\therefore b^2 = \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{4}(16) = 12$$

∴ معادلة القطع الزائد هى:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{12} = 1$$

تمارين (19)

1 - أوجد إحداثيات كل من الرأسين والبؤرتين وكذلك الاختلاف المركزى وطول الوتر البؤرى العمودى لكل من القطوع الزائدة الآتية :-

1- $4x^2 - 25y^2 = 180$

2- $49y^2 - 16x^2 = 784$

3- $x^2 - y^2 = 25$

4- أوجد معادلة القطع الزائد الذى طول محوره القاطع = 8 وبؤرتيه $S_1(5, 0), S_2(-5, 0)$

5- أوجد معادلة القطع الزائد الذى طول محوره المرافق = 24 وبؤرتيه $S_1(0, 13), s_2(0, -13)$

6- أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه $0\ (0, 0)$ واحدى بؤرتيه $S_1\ (8, 0)$ واحدى رأسيه $k\ (6, 0)$

7 - أوجد معادلة المحل الهندسى لنقطة تتحرك فى مستو بحيث يكون بعدها عن النقطة $A\ (0, 6)$ يساوى $\frac{3}{2}$ بعدها عن المستقيم $3y = 8$

8 - أوجد معادلة القطع الزائد الذى مركزه نقطة الأصل ومحوره القاطع على المحور y واختلافه المركزى $e = 2\sqrt{3}$ وطول وتره البؤرى العمودى يساوى 18

9- أوجد المركز وطولى المحورين فى القطع الزائد:

$$4x^2 - 9y^2 + 24x + 36y - 36 = 0$$

10 - أوجد إحداثيات المركز والبؤرتين والرأسين فى القطع الزائد:

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y - 124 = 0$$

11 - أوجد معادلتى المماس والعمودى للقطع الزائد $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ عند النقطة $P_1\left(5, \frac{-16}{3}\right)$

12 - أوجد معادلة القطع الزائد الذى بؤرته $S_1(-1, 1)$ ودليله المستقيم $x + y = 2$ واختلافه المركزى $= \sqrt{5}$.

الباب الثالث

الدالة والنهايات

مقدمـــــة :

يعتبر مفهوم الدالة حجر الأساس فى دراسة التحليل الرياضى فعن طريق هذا المفهوم حلت كثير من المشاكل التى واجهت الباحثين فى التحليل الرياضى.

وتجدر الاشارة هنا إلى أن لمفهوم الدالة أهمية قصوى فى دراسة معظم موضوعات الرياضيات إن لم يكن جميعها.

ويعتبر التفاضل والتكامل من أبرز موضوعات الرياضيات التى تعتمد على مفهوم الدالة.

وكلمة دالة تعبر عن مفهوم أن كمية ما تعتمد على أو تتوقف على أو تتعين بواسطة كمية أخرى:

أ- فمثلا مساحة المربع تعتمد على طول ضلعه حيث يمكن حساب مساحة المربع إذا علم طول ضلعه.

ب - حجم الكرة يعتمد على نصف قطرها.

جـ - متوسط انتاج الفدان من المحاصيل يتوقف على كمية السماد المستخدم.

د - متوسط ارتفاع نوع معين من أنواع النباتات تتوقف على سن النبات.

هـ - متوسط دخل الفرد تتوقف على كمية الانتاج.

وهكـــــذا.

وعلى ذلك يكون من الضـرورى الاهتـمـام بهـذه الدراسـة فى هذا البـاب والتى سوف تتناول :

1 - الدالة وأنواعها.

2 - العمليات على الدوال.

3 - المجال والمدى للدوال المقررة فى هذا المنهج.

4 - الدوال السامية .

5- النمط التى تكتب بها الدوال (صريحة أو ضمنية)

الدالة الحقيقية

مثال تمهيدي:

إذا كان X ، Y مجموعتين جزئيتين من الأعداد الحقيقية حيث:

$X = \{ -2, -1, 0, 1, 2 \}$

$Y = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5 \}$

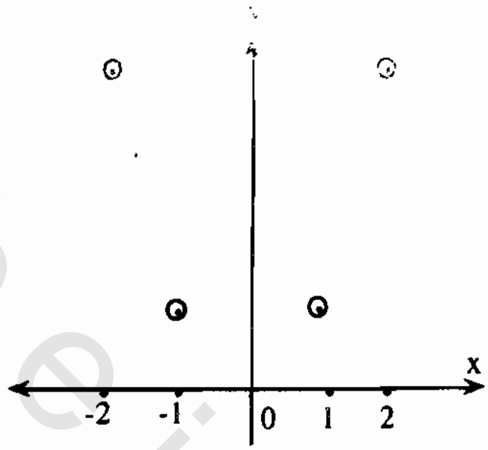
وأعطيت العلاقة Z بينهما من X إلى Y بالقانون :

$y = x^2 \quad : x \in X , y \in Y$

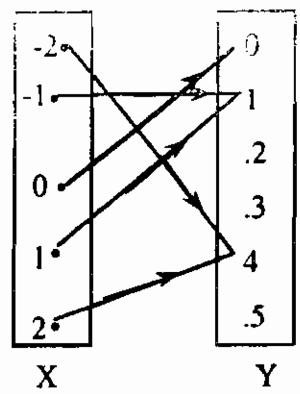
فإن بيان هذه العلاقة هو الأزواج المرتبة :

$Z = (-2, 4), (-1 ,1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)$

بتمثيل هذه العلاقة بالمخطط السهمي وكذلك بالمخطط البياني شكل (53) شكل (54) على الترتيب.



شكل 54



شكل 53

فى بيان هذه العلاقة : نلاحظ أن كل عنصر فى X يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر Y.

فى المخطط السهمى : نلاحظ أن سهم واحد فقط يخرج من كل عنصر من عناصر X.

والعلاقة Z المعطاه فى هذا المثال تسمى داله حقيقية F وأن :

المجموعة X تسمى مجال الدالة F ويرمز لها بالرمز D_F حيث :

$D_f = \{ -2 , -1, 0, 1, 2 \}$

المجموعة Y تسمى المجال المقابل للدالة ويساوى:

$Y = \{ 0 , 1, 2 , 3 , 4 , 5 \}$

ومجموعة قيم y المناظرة لجميع قيم x تسمى مدى الدالة ويرمز له بالرمز R_F يساوى :-

$R_F = \{0 , 1, 4 \}$

القانون $y = x^2$ يسمى قاعدة الدالة، y تسمى صورة x أو قيمة الدالة للمتغير المستقل x.

مفهوم الدالة الحقيقية:

إذا كانت X , Y مجموعتين جزئيتين من الأعداد الحقيقية فإن العلاقة Z من X إلىY تسمى دالة حقيقية إذا كان :

كل عنصر من المجموعة X يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة Y ويعبر عن هذه العلاقة بالصورة:

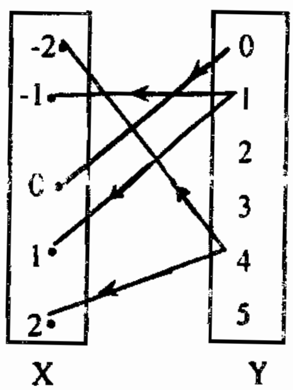
$F : X \to Y$

وتقرأ F دالة من X إلىY .

أما معكوس الدالة السابقة أي بعكس الأزواج المرتبه السابقة والتى تكون على الصورة :

$$F^{1} = \{ (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2) \}$$

إنها لا تكون دالة لأنها تتعارض مع المفهوم فالعنصر 4 من المجموعة Y ارتبط بعنصرين من عناصر المجموعة X (2 ,-2) شكل 55.



شكل 55

مثال 1:

أي من العلاقتين التاليتين تعتبر دالة ؟

(a) $G = \{ (-1, 2), (2, 2), (3, 5), (6, 1) \}$

(b) $H = \{ (0, 7), (1, 5), (1, 2), (3, -4) \}$

الحـــل:

(a) G تعتبر دالة لأن لكل قيمة للمتغير x توجد قيمة واحدة للمتغير y.

ويتضح ذلك من الآتي :

$$
\begin{array}{ccc}
x & & y \\
-1 & \longrightarrow & 2 \\
2 & \longrightarrow & 2 \\
3 & \longrightarrow & 5 \\
6 & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

(b) H ليست دالة لوجود قيمتين للمتغير y مناظرتين للقيمة $x = 1$:-

$$
\begin{array}{ccc}
x & & y \\
0 & \longrightarrow & 7 \\
1 & \nearrow & 5 \\
 & \searrow & 2 \\
3 & \longrightarrow & -4
\end{array}
$$

وهذا ما يتعارض مع مفهوم الدالة.

تمثيل العلاقة بين متغيرين y, x بيانيا :

(1) نعوض عن x ببعض القيم التى تنتمى إلى مجال العلاقة X ونوجد قيم y المناظرة لنحصل على بعض الأزواج المرتبة التى تنتمى إلى هذه العلاقة.

(2) ننشئ نظام إحداثى مناسب للأزواج التى حصلنا عليها.

(3) نعين على مستوى الاحداثيات النقط التى تمثل هذه الأزواج.

(4) فقط إذا كانت العلاقة بين x , y من الأعداد الحقيقية نرسم منحنى بيانى مار بهذه النقط ليمثل العلاقة المعطاة.

مثال 2 :

إرسم الخط المستقيم الذى تمثله كل مجموعة :

$F = \{ (x, y) : 2x - y = 6 \}$

$G = \{ (x, y) = 2x + 2y = 5 \}$

الحـــل :

نعوض عن x ببعض القيم ونوجد قيم y المناظر ةفى الدالة F:

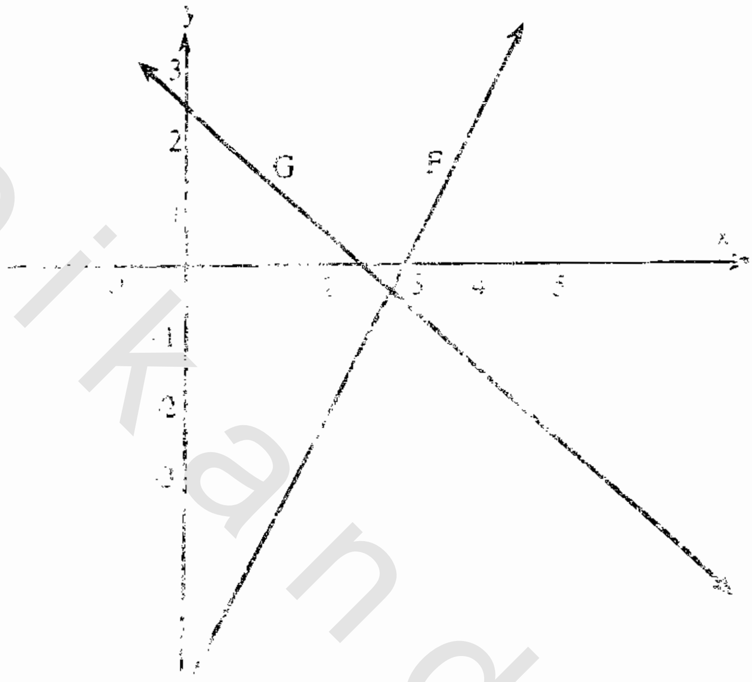
x	1	2	3	4
y	-4	-2	0	2

الرسم البيانى يوضحه شكل (56)

نعوض عن x ببعض القيم ونوجد قيم y المناظرة فى الدالة G :

x	0	1	2	3
y	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$

الر سم البيانى يوضحه شكل (56)



شكل (56)

مثال ( ) :

لكل من العلاقات التاليه بين المجال والمدى ووضع بالرس البيانى :

$G = \{ (-2, 0), (-1, -2), (1, 2), (0, -1) \}$

$H = \{ (x, y): -1 \leq x \leq 2 \ , -3 \leq y \leq 4 \}$

الحـــل :

مجال G يساوى :

$D_G = \{ -2, -1 \ , 1, 0 \}$

مجال H يساوى :

$D_H = \{ x : -1 \leq x \leq 2 \}$

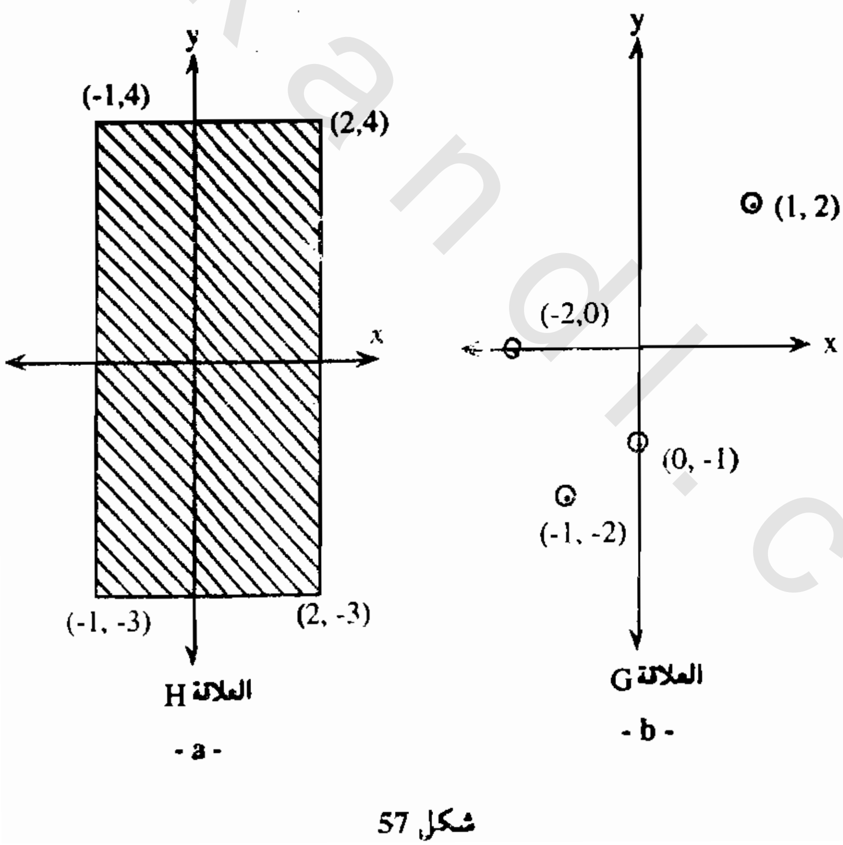
مدى G يساوى :

$R_G = \{ 0 , -2 , 2, -1 \}$

مدى H يساوى :

$R_H = \{ y : -3 \leq y \leq 4 \}$

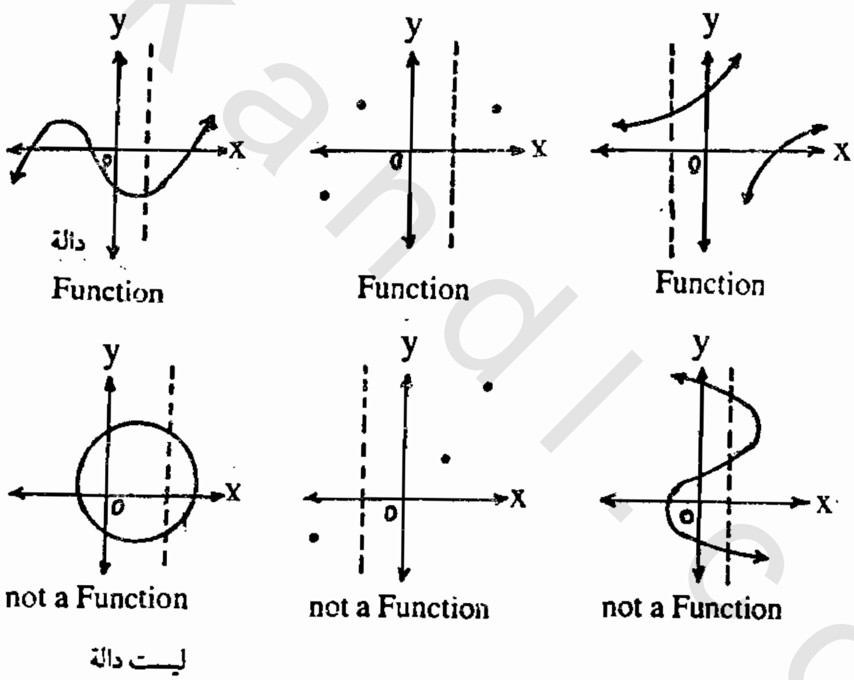
العلاقة H تبينها المنطقة المظللة شكل (57 - a)



شكل 57

استخدام الخط العمودى للكشف عن الدوال :

يتم إستخدام اختبار الخط العمودى لمعرفة ما إذا كانت العلاقة الجبرية تمثل دالة أو لا تمثل دالة. فإذا قطع الخط العمودى الموازى لمحور y المنحنى فى أكثر من نقطة فإن المنحنى لا يمثل دالة وإذا قطعه فى نقطة واحدة فقط فإن المنحنى يمثل دالة ويبين شكل 58 أمثلة وغير الدوال.



شكل (58)

تماريـــــن (20)

1 - أذكر مجال ومدى كل من العلاقات الآتيه مع الرسم:

(a) $F = \{ (1, 1), (2, 2), (4, 4), (9, 9) \}$

(b) $F = \{1, -3), (2, -1), (3, 1), (4, 3), (5, 5) \}$

(c) $F = \{ (5, 0), (0, 1), (0, 7) \}$

(d) $F = \{ (-7, 2), (-3, 0), (5, -1), (-3, 6) \}$

(f) $F = \{(-3, 1), (-1, 1), (0, 0), (4, 1) \}$

2 - أى من العلاقات السابقه تمثل دالة.

3 - إذا كانت :-

$F(x) = \sqrt{x+5} \quad , \quad x \geq -5$

أوجد قيمة $F(0)$ $F(5)$, $F(-5)$,

4 - إذا كانت :

$$F(x) = \frac{7x - 1}{x + 5} \quad , \quad x \neq -5$$

أوجد قيمة $F(5)$ $F(1)$, $F(-1)$,

ثم أوجد المجال

5 - إذا كانت :

$F(x) = 5x^2$

أوجد قيمة :-

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

العمليات على الدوال :

(أولا) الجمع والطرح:

إذا كانت G, F دالتين مجالهما D_F , D_G فإن :-

$$(F \pm G)(x) = F(x) \pm G(x)$$

مجالهما هو :-

$$D_{(F \pm G)}(x) = D_F \cap D_G$$

أي بحالهما هو تقاطع المجالين.

(ثانيا) الضرب والقسمة:-

حاصل ضربهما :

$$D_{(F \,.\, G)}(x) = F(x) \,.\, G(x)$$

ومجالهما هو :-

$$D_{(F \,..\, G)}(x) = D_F \cap D_G$$

أى مجالهما هو تقاطع المجالين

خارج قسمتهما :-

$$\frac{F}{G}(x) = \frac{F(x)}{G(x)} \quad , \quad G(x) \neq 0$$

ومجالهما هو :

$$D_{\frac{F}{G}}(x) = D_F \cap D_G - \{\text{أصفار المقام}\}$$

مثال 1 :

إذا كان :-

$F(x) = x^2 - 3x + 9$, $D_F = [-5, 2]$

$G(x) = 4 - 7x$, $D_G = [-3, 7]$

أوجـــــد:

$F(x) + 6(x)$, $F(x) - G(x)$

$D_{(F(x) + G(x))}$

الحـــــل :

$F(x) + g(x) = (x^2 - 3x + 9) + (4 - 7x)$

$F(x) - G(x) = (x^2 - 3x + 9) + (4 - 7x)$

$D_{F \pm G} = D_F \cap D_G$

$= [-3, 2]$

مثال 2 :

إذا كانت :

$F(x) = x^2 + 9$, $D_F = [-4, 5]$

$G(x) = x^2 = -2x - 3$, $D_G = [-2, 7]$

أوجد :

$(F . G), (F / G)$, $D(F . G)$, $D(F / G)$

الحـــــل :

$(F . G) = (x^2 - 9) . (x^2 - 2x - 3)$

$(F / G) = (x^2 - 9) / (x^2 - 2x - 3)$

$D_{(F.G)} = D_F \cap D_G$

$= [-2 , 5]$

$D_{(F/G)} = D_F \cap D_G$ - {أصفار المقام}

$\because x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

{أصفار المقام} = $\{-1 , 3\}$

$D_{(F/G)} = [-2, 5] - \{-1 , 3\}$

تمارين (21)

1 - إذا كانت :-

$$F(x) = 2x - 1 \quad , \quad G(x) = \frac{1}{3x+1}$$

أوجد :

$$F \pm G \,,\; \frac{G}{F} \,,\; \frac{F}{G} \,,\; F.G$$

2 - إذا كانت :-

$$F(x) = x^2 \quad , \quad G(x) = 2x - 3$$

أوجد:

$$F \pm G \,,\; F.G \,,\; F/G$$

3 - إذا كانت :-

$$F(x) = \sqrt{x} \quad , \quad G(x) = \sqrt{4 - x}$$

أوجد :

$$F \pm G \,,\; F.G \,,\; F/G \,,\; G/F$$

والمجالات الخاصة بكل دالة.

4 - إذا كانت :

$$F(x) = \frac{1}{x+1} \quad , \quad G(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

أوجد :

$$F.G \,,\; F/G \,,\; G/F$$

5 - إذا كانت :

$$F(x) = \sqrt{7 - 2x} \quad , \quad G(x) = \frac{1}{x - 2}$$

أوجـــد :

$$D_{F.G} \quad , \quad D_F \quad , \quad D_G$$

مثـــال 3 :

أوجد المجال والمدى لكل من الدوال الآتية:-

(a) $F(x) = \sqrt{x - 1}$

(b) $F(x) = x^2 - 1$

(c) $F(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

الحــــل :

(a) $F(x) = \sqrt{x - 1}$

المقادير تحت الجذر التربيعى يجب أن تكون ≤ صفر

$\therefore x - 1 \geq 0$

$x \geq 1$

$\therefore D_F = [1 , \infty)$

أقل قيمة لـ $x = 1$ عندها $F(x) = 0$ وتزيد بعد ذلك $F(x)$ بزيادة x

$\therefore R_F = [0 , \infty)$

(b) $F(x) = x^2 - 1$

$D_F = R$

R_F :

x	0	-1	-2	-3	1	2
F(x)	-1	0	3	8	0	3

واضح من الجدول أن أقل قيمة للدالة F(x) تساوى 1- وتزداد بزيادة x

$\therefore R_F = [-1 , \infty)$

(c) $F(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$ $x \neq 2$

$D_F = R - \{2\}$

R_F:

$F(x) = x + 2$

$R_F = R - \{4\}$

مثال 4 :

أوجد المجال والمدى للدالة :

$$F(x) = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

الحـــل :

يكون مجال خارج قسمة دالتين هو تقاطع مجاليهما ما عدا أصفار دالة المقام أي أن :

$D_F = R - \{4\}$

لاحظ أن المتغير x متغير مستقل ، F(x) أو y متغير تابع ولإيجاد المدى بدون رسم بيانى لهذا النوع من الدوال نجعل المتغير y متغير مستقل والمتغير x متغير تابع كالآتى:

$$y = \frac{2x + 3}{x - 4}$$

بضرب الطرفين فى (x - 4)

$$y(x - 4) = 2x + 3$$

$$yx - 4y = 2x + 3$$

$$yx - 2x = 4y + 3$$

$$x(y - 2) = 4y + 3$$

$$x = \frac{4y + 3}{y - 2}$$

لاحظ أن المتغير y فى هذه الصورة متغير مستقل ويمكن أن يأخذ الأعداد الحقيقية ما عدا العدد 2 وبالتالى يكون المدى :

$$R_F = R - \{2\}$$

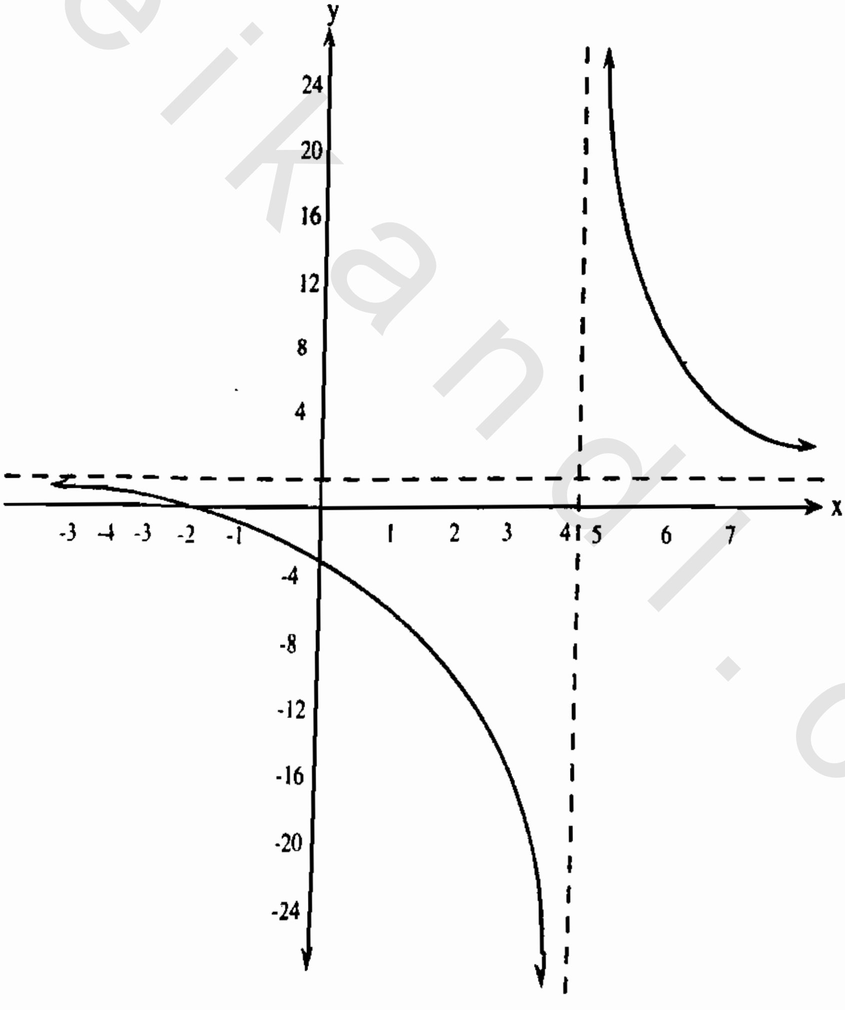
مثـــال 5 :

حل المثال السابق بالرسم البيانى وأوجد المدى بهذه الطريقة والمجال.

الحـــــل :

يتم عمل الجدول ثم الرسم البيانى شكل 59

x	-4	-3	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	2	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
f(x)	$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{4}$	$-1\frac{2}{3}$	$-3\frac{1}{2}$	-9	-20	∞	24	13



شكل 59

نلاحظ من الرسم البيانى شكل (59) الآتى بـ

١- عند الاقتراب من x = 4 تقترب قيم الداله من مالا نهايه ولذلك يكون المجال:-

$D_F = R - \{4\}$

2- تأخذ قيم قيم لا نهائية عند y = 2 ولذلك يكون المدى:-

$R_F = R - \{2\}$

تمارين (22)

أوجد المجال والمدى لكل من الدوال الآتية :

1- $F(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3}$

2- $F(x) = \dfrac{x + 2}{x - 3}$

3- $F(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

4- $F(x) = \dfrac{5x - 3}{x - 1}$

5- $F(x) = 2$

6- $F(x) = \sqrt{x}$

7- $F(x) = x^2 - 1$

8- $F(x) = x^2 + 1$

9- $F(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

10- $F(x) = \sqrt{1 - x^2}$

11- $F(x) = 2x + 3$

12 - $F(x) = x + x^2$

13- $F(x) = x^2 + 4x - 5$

14- $F(x) = x^2 - 6x + 9$

15- $F(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

16- $F(x) = \sqrt[3]{x - 2}$

17- $F(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

18 - أوجد مجال كل من المعرفتين بالمعادلتين:

(a) $F(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$

(b) $F(x) = \dfrac{2x - 1}{2x^2 + 7x - 7}$

بعض أنواع الدوال الحقيقية :

تصنف الدوال الحقيقيه حسب شكل قواعدها الجبرية ومنها:

(أولا) الدوال كثيرات الحدود

(ثانيا) الدوال القياسية

(ثالثا) الدوال المتسامية:-

1- الدوال المثلثية

1-الدوال الأسية

3- الدوال اللوغاريتيمة

(رابعا) دوال غير قياسية

(أولا) الدوال كثيرات الحدود :

هى دوال حقيقية على الصورة :

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

$an \neq 0$

$a_0 , a_1 , a_2 , \dots \quad an \in R$

$n \in N$

قاعدة كثيرة الحدود عبارة عن المجموع الجبرى لعدة حدود كل منهما على

الصورة:-

$a_r x^r \ , \ r \in N$

وهى على سبيل المثال مثل :-

(a) $F(x) = 7$ (دالة ثابتة)

(b) $F(x) = -3$ (دالة ثابته)

(c) $F(x)= 2x + 5$ (دالة خطيه)

(d) $F(x) = 2x^2 + 5x + 6$ (دالة تربيعية)

وتكون درجة دالة كثيرة الحدود هى أكبر أس للمتغير x ، ويكون الحد المطلق هو الحد الخالى من x.

مجال هذه الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية أما المدى فيتوقف على شكل الدالة أو الرسم البيانى لها وهذا ما توضحه الأمثلة الآتية:

مثال 1 :

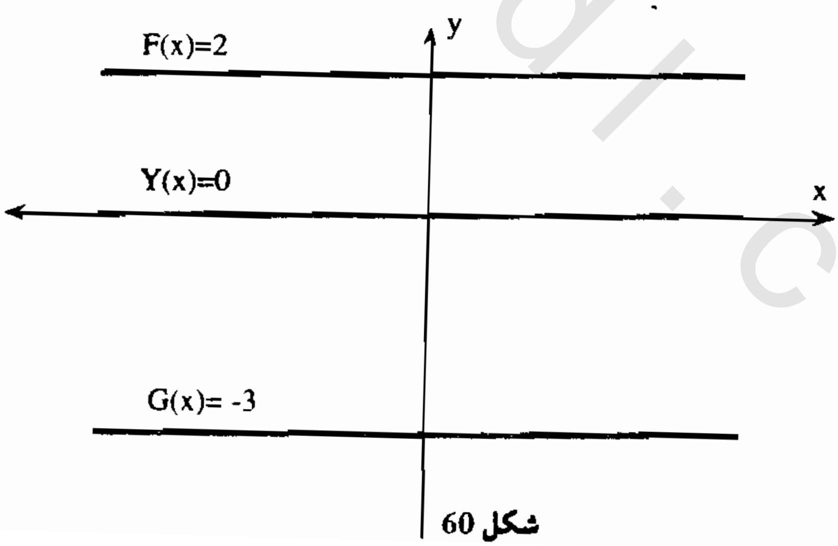
ارسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية :-

I- $F(x) = 2$ II- $G(x) = -3$ III- $Y(x) = 0$

مع إيجاد المجال والمدى لكل دالة.

الحل :

رسم الدوال شكل 60



شكل 60

I- $F(0) = 2$, $F(1) = 2$, $F(2) = 2$, $F(\infty) = 2$

$F(-1) = 2$, $F(-2) = 2$, $F(-3)=2$, $F(-\infty)=2$

$\therefore D_F = R$

$R_F = 2$

II- $G(0) = -3$, $G(1) = -3$, $G(2) = -3$, $G(\infty) = -3$

$G(-1) = -3$, $G(-2) =-3$, $G(-3)=-3$, $G(-\infty)=-3$

$\therefore D_G = R$

$R_G = -3$

III- $Y(0) = 0$, $Y(1) =0$, $Y(2) = 0$, $Y(\infty)=0$

$Y(-1)=0$, $Y(-2)=0$, $Y(-3) =0$, $Y(-\infty)=0$

$\therefore D_Y = R$

$R_Y = 0$

مثـــال 2 :

إذا علم أن :-

$F(x) = 2x + 3$

(أ) أوجد :-

$F(-2)$, $F(-1)$, $F(0)$, $F(2)$

(ب) إرسم $F(x)$

الحـــل:

(أ) $F(-2) = 2(-2) + 3 = -1$

$F(-1) = 2(-1) + 3 = -1$

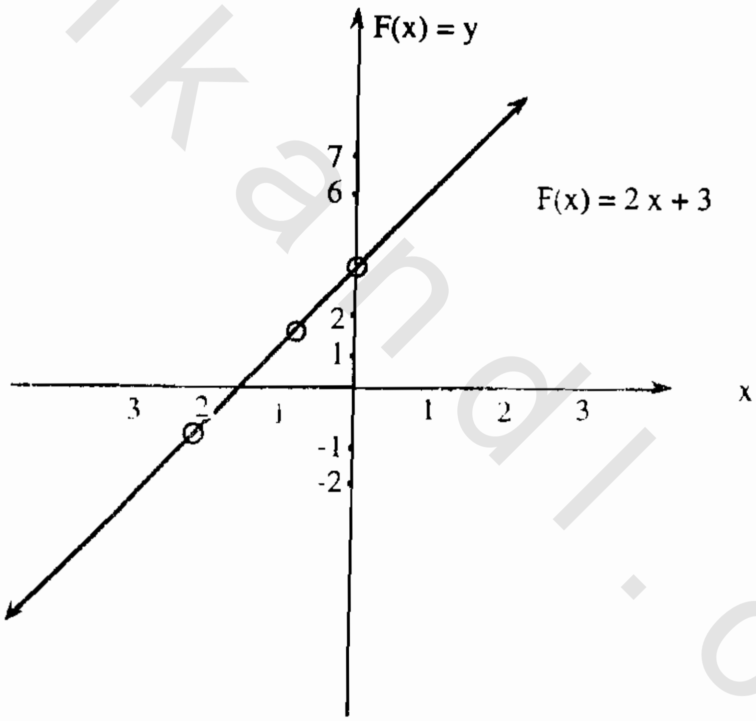
$F(0) = 2(0) + 3 = -3$

$F(2) = 2(2) + 3 = -7$

(ب) ارسم من الجزء (أ) لدينا النقاط الآتية:

$(-2, -1), (-1, 1), (0, 3), (2, 7)$

يتم توقيعها على الرسم البيانى وتوصيلها (شكل 61)



شكل 61

مثال 3:

أوجد المجال والمدى للدالة :-

$F(x) = 2x + 3$

الحـــل:

الدالة كثيرة الحدود من الدرجة الأولى . مجالها جميع الأعداد الحقيقية

$\therefore D_F = R$

من الرسم البيانى في المثال السابق نجد أن الدالة عبارة عن خط مستقيم ممتد إلى مالا نهاية من جهتيه أى عندما x تقترب من مالانهاية فإن y تقترب من مالا نهاية وعندما x تقترب من سالب مالا نهاية فإن y تقرب من سالب مالا نهاية أي أن المدى لهذه الدالة هو جميع الأعدادا الحقيقية بمعنى :-

$R_F = R$

الدالة متعددة القواعد:

يقال للدالة F(x) إنها متعددة القواعد إذ اكان مجالها مقسما إلى فترات ولكل فترة قاعدة خاصة بها كما فى المثال التالى:

مثـــال :

إذا كانت :

$$F(x) = \begin{cases} 2x - 3 & , \; x < 0 \\ 2x + 3 & , \; x > 0 \end{cases}$$

أوجد كل من :

إذا كان لها F(1), F (0) , F (-1)

وجود ثم عين مجال ومدى هذه الدالة

الحــــل :

مجال هذه الدالة مقسم إلى فترتين هما :

1- $(-\infty , 0)$, $F(x) = 2x - 3$

2- $(0 , \infty)$, $F(x) = 2x + 3$

كما أن العدد صفر لا ينتمى لأى من الفترتين

غير معرف ← $\therefore F(0)$

$$\therefore D_F = \{ R - \{0\} \}$$

أى أن مجال هذه الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 0$

$\because -1 \in (-\infty , 0)$

$\therefore F(-1) = 2(-1) - 3 = -5$

$\because 1 \in (0 , \infty)$

$\therefore F(1) = 2(1) + 3 = 5$

وعند $x < 0$ يكون :

$2x < 0$

$\therefore 2x - 3 < -3$

$\therefore F(x) \in (-\infty, -3)$ I

وعند $x > 0$ يكون :- $2x > 0$

$2x + 3 > 3$

$\therefore F(x) \in (3, \infty)$ II

من I , II يكون مدى هذه الداله هو :-

$R_F = (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

$= \{ x : R - [-3, 3] \}$

أى أن مدى هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا الفترة :

$[-3, 3]$

تمارين (23)

1- ارسم الشكل البيانى لكل من الدالتين :

(a) $$F(x) = \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} \quad , \quad x \neq \frac{3}{2}$$

(b) $$G(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 9}{2x - 3} & , \quad x \neq \dfrac{3}{2} \\ 6 & , \quad x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

ثم عين مجال ومدى كل منهما وهل هما متساويتان ؟

2 - إرسم الشكل البيانى لكل من الدوال الآتية مبينا مجال ومدى كل منهم:

(a) $$F(x) = \begin{cases} 2 - 3x & , \quad 0 \geq x \geq -2 \\ 2 & , \quad 3 \geq x > 0 \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} 2x + 3 & , \quad x < -1 \\ 2 & , \quad x \geq -1 \end{cases}$$

(c) $$F(x) = \begin{cases} -1 & , \quad 1 > x \geq -2 \\ 2 & , \quad 3 \geq x \geq 1 \end{cases}$$

دالة المقياس:

درسنا في الباب الأول القيمة المطلقة لأى عدد حقيقى x والخواص الأساسية لها.

ونعرف دالة المقياس على نفس النمط كالآتى:

$$F(x) = |x| \begin{cases} -x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$$

أى أن مقياس (صفر) = صفر

ومقياس (أى عدد بخلاف الصفر) = عدد موجب

أى أن مجال دالة المقايس هو جميع الأعداد الحقيقية R

ويكون مدى دالة المقياس هو جميع الأعداد الحقيقية الموجبة R^+

بالإضافة الى الصفر، تكتب كالآتى كل من المجال والمدى :-

$D_F = R$

$R_F = [0 , \infty)$

مثـــال 1 :

إرسم بيانيا الدالة الآتيه:

$F(x) = |x|$

الحـــل :

يتم عمل جدول من سالب مالا نهاية وحتى الصفر للدالة :

$F(x) = -x \quad , (-\infty , 0]$

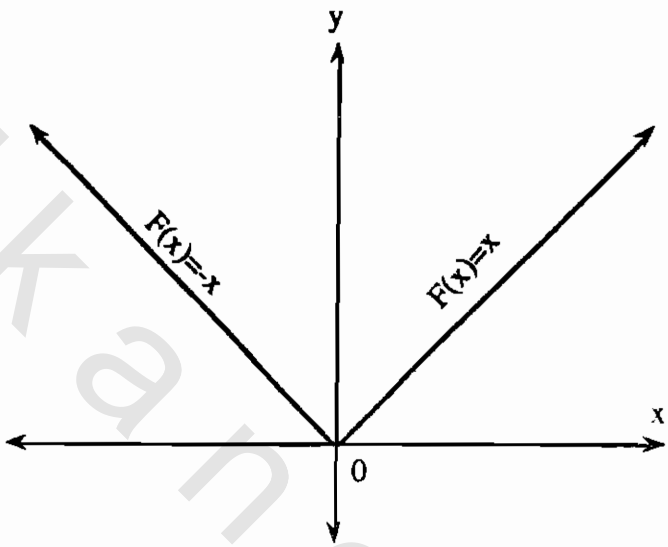
x	-3	-2	-1
y	3	2	1

ثم عمل جدول من صفر إلى موجب مالانهاية للدالة :-

$F(x) = x \quad , [0 , \infty)$

x	0	1	2
y	0	1	2

الرسم البيانى يوضحه شكل 62



شكل 62

ومن الشكل البيانى نستنتج أن :

1- $D_F = R$

2- $R_F = [0 , \infty)$

3- $F(x) = F(-x)$ ∴ الدالة زوجية

مثال 2 : ارسم بيانيا الدالة الآتية:

$F(x) = | x - 3 |$

ثم أوجد مجال ومدى هذه الدالة

الحل:

عندما $x - 3 = 0$

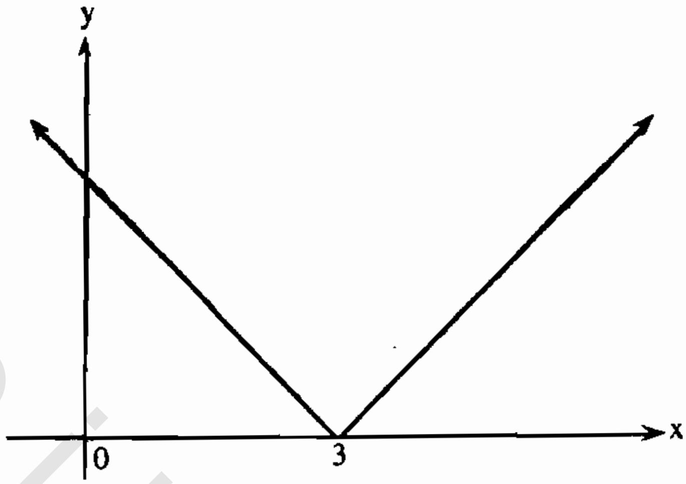
$\therefore x = 3$

$$\therefore (x) = \begin{cases} 3 - x & , x < 3 \\ x - 3 & , x \geq 3 \end{cases}$$

ويتم عمل الجدول حيث لكل قاعدة مجال كالآتي:

الفترة	$(-\infty , 3)$			$[3 , \infty)$			
القاعدة	$3 - x$			$x - 3$			
x	0	1	2	3	4	5	6
y	3	2	1	0	1	2	3

نوقع النقاط بالجدول على الرسم البيانى كما هو موضح بشكل 63



شكل 63

نلاحظ من الشكل البيانى (شكل 63) الآتى:

1 - الدالة بأكملها تقع فوق المحور x

2 - مجال هذه الدالة هو مجموعة الأعداد الحقيقية ومداها من صفر حتى مالانهاية وتكتب بالأسلوب الرياضى كالتالى :-

$D_F = R$

$R_F = [0\ ,\ \infty)$

تمارين (24)

I - إرسم الدوال الآتيه مع إيجاد المجال والمدى:-

1- $F(x) = x + |x|$

2- $F(x) = |2x - 3|$

3- $F(x) = x + |x^2 - 6x|$

4- $F(x) = -x + |x^2 - 6x|$

5- $F(x) = x - |x|$

6- $F(x) = -x + |x|$

II -أوجد مجال الدوال :

1- $F(x) = \dfrac{|2x - 3|}{x - 3}$

2- $F(x) = \dfrac{x - 1}{|x - 2|}$

3- $F(x) = \dfrac{-x + |x|}{x - 2}$

4- $F(x) = \dfrac{|2x^2 + 3 + 5|}{\sqrt{x^2 - 1}}$

الدوال السامية

تعرف كل دالة ليست جبرية بأنها دالة سامية وأشهر هذه الدوال هى:

- الدوال الأسية
- الدوال اللوغاريتيمة
- الدوال المثلثية

الدالة الأسية:

إذا كان a عدد حقيقى موجب ، a ≠ 1 فإن الدالة الأسية للأساس a هىF (x)تعرف كالآتى:

$$F(x) = a^x$$

حيث x أى عدد حقيقى.

ومن القواعد المعروفة فى الدوال العكسية تكون هذه الدالة أحادية وبالتالى فإن لها معكوس هو $F^{-1}(x)$.

مثال تمهيدى:

إرسم الرسم البيانى للدوال الآتية:

(a) $y = 2^x$ (b) $y = 3^x$

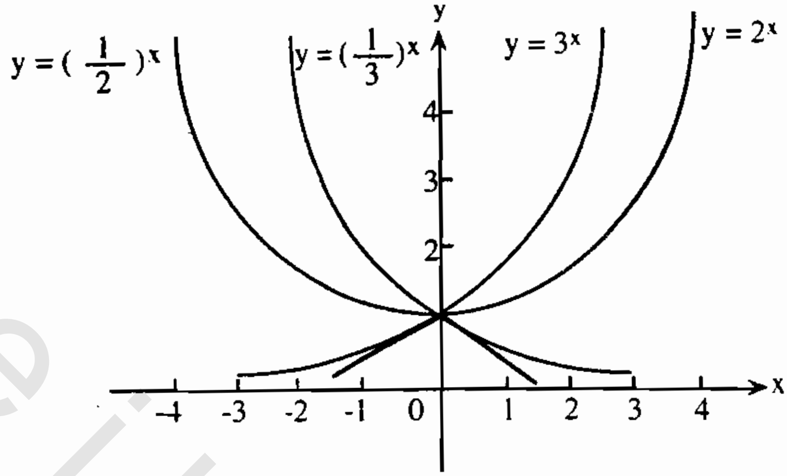
(c) $y = (\frac{1}{2})^x$ (d) $y = (\frac{1}{3})^x$

الحـــل :

يتم عمل الجدول البيانى الآتى للدوال السابقة:-

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$(\frac{1}{2})^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
$(\frac{1}{3})^x$	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

ثم توقيع هذه النقاط بيانيا ويمثلها شكل 64



شكل 64

نلاحظ من الجدول والرسم البيانى الآتى:

1 - الدوال (a) , (b) تزايدية حيث الأساس $1 < a$

2 - الدوال (c) , (d) تناقصية حيث الأساس $1 > a$

3 - مجال جميع الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

4 - مدى جميع الدوال هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

5 - جميع الدوال تمربالنقطة $A\ (0\ ,\ 1)$.

وعلى ذلك تكون الدالتين (a) , (b) ممثلة للدوال الأسية التى يزيد فيها الأساس a عن الواحد $(a > 1)$ وهى فى هذه الحالة تزايدية والدالتين (c) , (d) ممثلة للدوال الأسية التى يقل فيها الأساس a عن الواحد $(a < 1)$ وهى فى هذه الحالة تناقصية.

مثال 1:

أوجد قيم a للدوال $y = a^x$ التى تحتوى النقاط الآتية:

B (2, 49) , E (3, 8) , T (2, 64)

الحـــــل :

بالنسبة للنقطة (2, 49) B نعوض فى معادلة الداله $y = a^x$

$\therefore 49 = a^2$

$7^2 = a^2$

$\therefore a = 7$

بالنسبة للنقطة (3, 8) E نعوض فى معادلة الدالة $y = a^x$:

$\therefore 8 = a^3$

$2^3 = a^3$

$\therefore a = 2$

بالنسبة للنقطه (2, 64) T نعوض فى معادلة الداله $x = a^x$

$\therefore 64 = a^2$

$8^2 = a^2$

$\therefore a = 8$

مثـــــال 2 :

أوجد جميع الأعداد الحقيقية التى تحقق المعادلة :

$5^{x (x - 3)} = 625$

الحل:

يتم تحليل الطرف الأيمن وبالتالى تكتب المعادلة على الصورة:

$5^{x (x-3)} = 5^4$

$\therefore x (x - 3) = 4$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x - 4)(x + 1) = 0$

$\therefore \quad x = 4$ I

أو

$x = -1$ II

مثـــال 3 :

أوجد قيمة x فى المعادلة

$$5^{x-3} + 5^{2-x} = \frac{6}{5}$$

الحـــل :

يتم فك الطرف الأيسر حسب قواعد الأسس وتصبح المعادلة كالآتى:

$$5^{x} \cdot 5^{-3} + 5^{2} \cdot 5^{-x} = \frac{6}{5}$$

$$5^{x}\left(\frac{1}{125}\right) + 25\left(\frac{1}{5^{x}}\right) = \frac{6}{5}$$

ضع $y = 5^{x}$

$$\therefore \frac{y}{125} + \frac{25}{y} = \frac{6}{5}$$

بضرب الطرفين فى 125 y

$$\therefore y^{2} + 25\,(125) = 150\,y$$

$$y^{2} - 150y + 3125 = 0$$

$$(y - 125)(y - 25) = 0$$

$\therefore y = 125$ I

$$\therefore 5^{x} = 125$$

$5^x = 5^3$

$\therefore x = 3$

$, \quad y = 25$

$5^x = 25$

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$

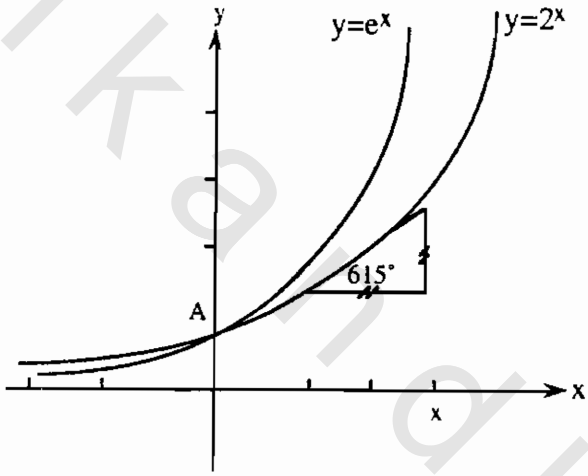
$\therefore x = 2$

∴مجموعة الحل للمعادلة هى:-

$X = \{ 3 , 2 \}$

الدالة الأسية الطبيعية e^x

عرفنا مما سبق أن جميع الدوال الأسية تمر بالنقطة A (0 , 1) وعند رسم مستقيم يمر بهذه النقطة وميله 1 + يكون هذا المستقيم مماسا لمنحنى دالة واحدة $x = a^x$ ويكون ثابت هذا المنحنى مساويا لـ 2.718281 حيث يكون ميل هذا الماس هو نفس المنحنى - أي المشتقة الأولى للمنحنى تساوى نفس المنحنى - وقد تغير رمز ثابت هذا المنحنى من a ليصبح e (Euler number)ويكون أساسا للوغاريتم الطبيعى (e = 2.718281828) شكل 65.



شكل 65

ومن هذا التعريف يمكن تقديم النظرية الآتية :

نظريـــــــة:

إذا كانت $f(x) = e^x$

فإن : $f`(x) = e^x$

تمارين (25)

1 - بإستخدام قواعد الأسس أكتب المقادير الآتية بطريقة مبسطة:

(a) $2^{\sqrt{8}} \cdot 2^{\sqrt{32}}$ (b) $2^{\sqrt{27}} \quad 2^{\sqrt{12}}$

(c) $2^{\sqrt{7}} \cdot 2^{\sqrt{28}}$ (d) $3^{5\sqrt{3}} \quad {}^{2\sqrt{3}} \cdot 3^{\sqrt{3}}$

2- حدد فى كل مما يأتى الدالة التزايدية والدالة التناقصية مع ذكر السبب:

(a) $F(x) = 3^{-x}$ (b) $F(x) = (\frac{1}{4})^{x}$

(c) $F(x) = (\frac{3}{2})^{x}$ (d) $F(x) = (\frac{2}{3})^{x}$

3 - إذا كانت :-

$F(x) = 3^{x} + 3^{-x}$

$G(x) = 3^{x} - 3^{3-x}$

أوجد :

(a) $F(x) + G(x)$

(b) $F(x) - G(x)$

(c) $F(x^2) + G(x^2)$

4- حل المعادلات الآتيه

(a) $2^{x-5} = 8$ (b) $2^{x-3} = 1$

(c) $3^{x-1} = \frac{1}{3}$ (d) $3^{x-2} = 27$

(e) $4^{x-1} = 1$ (f) $2^{x} = (4^{2})^{x+1}$

(g) $3^{x} = 9^{x-1} . 27$ (h) $3^{x} = 9^{x-1} . 27^{1-3x}$

(i) $2^{2x} - 12 . 2^{x} + 32 = 0$

(k) $4 (2^{x} + 2^{-x}) = 17$

الدوال اللوغريتيمية:

الدالة اللوغرتيمية هى معكوس الدالة الأسية ويرمز لها بالرمز $F^{-1}(x)$

حيث:

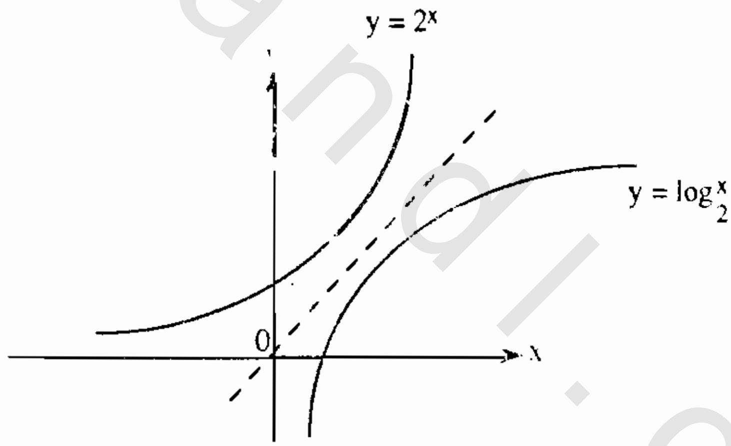
$$F^{-1}(x) = \log_a x$$

وتقرأ لوغاريتم العدد x للأساس a

ويمكن رسم الدالة اللوغاريتيمة بطريقة خط المرآة العاكس $(y = x)$ للدالة الأسية (راجع الدوال العكسية) فى الحالتين:

الحالة الأولى:

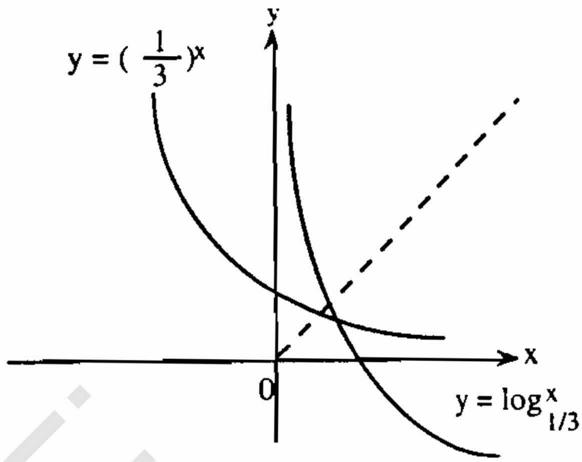
الأساس $a > 1$ شكل 66



شكل 66

الحالة الثانية :-

$0 < a < 1$ شكل 67



شكل 67

نلاحظ من الرسم البيانى للحالتين الآتى :-

الحالة الأولى : $a > 1$	الحالة الثانية : $0 < a < 1$
1 - الدالة تزايدية	الدالة تناقصية
2 - عند $x > 1$ يكون $\log_a x$ موجب	عند $x > 1$ يكون $\log_a x$ سالب
عند $x = 1$ يكون $\log_a^x$ = صفر	عند $x = 1$ يكون $\log_a x$ = صفر
عند $0 < x < 1$ يكون $\log_a x$ سالب	عند $0 < x < 1$ يكون $\log_a x$ موجب

وحيث أن الدالة اللوغاريتيمة هى معكوس للدالة الأسية يكون:

I- 1 - مجال الدالة اللوغاريتيمة هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

2 - مدى الدالة اللوغاريتية هو مجموعة الأعداد الحقيقية.

II - خصائص الدالة اللوغاريتيمة يمكن إستنتاجها من خواص الدالة الأسية.

وتكون كالآتى:

1 $\log_a M = \log_a N$ عندما يكون

$M = N$

2- $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

3- $\log_a M/N = \log_a M - \log_a N$

4- $\log_a M^k = k \log_a M$

5- $\log_a 1 = o$

6- $\log_a a = 1$

7- $a \log_a M = M$

حيث M , N , a عدد حقيقيا موجبا $a \neq 1$

مثال 1 :

إستعمل التعريف لإيجاد قيمة x فى كل مما يأتى:-

(a) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ (b) $\log_x 8 = 3$

(c) $\log_2 16 = x$ (d) $\log_3 (x + 3) = 2$

الحـــــل :

باستخدام التعريف يكون :

(a) $x = 3^{\frac{1}{2}}$

(b) $8 = x^3$

$2^3 = x^3$

وحيث ان الاس للطرف الأيمن = الأس فى الطرف الأيسر

الأساس للطرف الأيمن = الأساس فى الطرف الأيسر

$\therefore x = 2$

(c) $16 = 2^x$

$2^4 = 2^x$

وحيث أن الأساس للطرف الأيمن = الأساس فى الطرف الأيسر

∴ الأس للطرف الأيمن = الأس فى الطرف الأيسر

$\therefore x = 4$

(d) $x + 3 = 3^2$

$x = 9 - 3$

$x = 6$

مثـــال 2 :

حل كل من المعادلات الأتية :

(a) $\log_2 (x - 3) + \log_2 (x - 4) = 1$

(b) $\log_6 (x + 6) - \log_6 x = \log_6 (x - 4)$

الحــــل :

(a) $\log_2 (x - 3) (x - 4) = 1$

وباستخدام تعريف اللوغاريتم :-

$\therefore (x - 3) (x - 4) = 2^1$

$x^2 - 7x + 12 = 2$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$(x - 2) (x - 5) = 0$

أما $(x - 2) = 0 \rightarrow x = 2$

أو $(x - 5) = 0 \rightarrow x = 5$

مجموعة الحل للمعادلة هى :-

$X = \{2 , 5\}$

b- باستخدام تعريف اللوغاريتم :

$\therefore \dfrac{x+6}{x} = x - 4$

$x + 6 = x\,(x - 4)$

$= x^2 - 4x$

$\therefore x^2 - 4x - x - 6 = 0$

$x^2 - 5x - 6 = 0$

$(x - 6)(x + 1) = 0$

أما $(x - 6) = 0 \rightarrow x = 6$

أو $(x + 1) = 0 \rightarrow x = -1$

$\therefore$ مجموعة الحل للمعادلة هى :

$X = \{6, -1\}$

مثـــــال 3 :

إذا كان :

$\log_a = 0.21$, $\log_a 3 = 0.27$

أوجد قيمة كل مما يأتي:-

(a) $\log_a 6$ (d) $\log_a 72$

(c) $\log_a \sqrt{3}$ (d) $\log_a \sqrt{2}$

الحـــــل :

(a) $\log_a 6 = \log_a 2 + \log_a 3$

$= 0.21 + 0.27 = 0.48$

(b) $\log_a 72 = \log_a 8 + \log_a 9$

$= \log_a 2^3 + \log_a 3^2$

$= 3 \log_a 2 + 2 \log_a 3$

$= 3\,(0.21) + 2\,(0.\ 27) = 1.\ 17$

(c) $\log_a \sqrt{3} = \log_a 3^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \log_a 3$

$= \frac{1}{2}\,(0.27) \qquad = 0.135$

(d) $\log_a \sqrt{2} = \log_a 2^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2} \log_a 2$

$= \frac{1}{2}\,(0.21) \qquad = 0.105$

مثـــــال 4 :

إذا كان :

$$\frac{\log_a x}{2} = \frac{\log_a y}{3} = \frac{\log_a z}{5}$$

إثبت أن :

$x\,y = z$

الحـــــل :

بتطبيق قواعد النسب والتناسب :-

$$\therefore \text{إحدى النسب} = \frac{\log_a x + \log_a y}{2+3}$$

$$= \frac{\log_a z}{5}$$

$$\therefore \frac{\log_a x\, y}{5} = \frac{\log_a z}{5}$$

$$\log_a xy = \log_a z$$

وبتطبيق الخاصية رقم (1) فى اللوغاريتمات .

$$\therefore x\, y \equiv z$$

حل آخــــــر :

نضع كل من هذه النسب = k

$$\therefore \frac{\log_a x}{2} = \frac{\log_a y}{3} = \frac{\log_a z}{5} = k$$

$$\therefore \log_a x = 2k \qquad \rightarrow x = a^{2k}$$

$$\therefore \log_a y = 3k \qquad \rightarrow y = a^{3k}$$

$$\log_a z = 5k \qquad \rightarrow z = a^{5k}$$

بإيجاد قيمة الطرف الأيسر :-

$$x\,.\,y = a^{2k}\,.\,a^{3k}$$

$$= a^{5k}$$

$$= z$$

$$\therefore x\, y = z$$

اللوغاريتم الطبيعي :

يسمى اللوغاريتم للأساس e باللوغاريتم الطبيعي ويرمز له بالرمز ln

حيث :-

$$\log_e x = \ln x$$

ويستخدم اللوغاريتم الطبيعي في التفاضل والتكامل والعلوم علما بأن e عدد غير نسبي ويساوى تقريبا $\ln e = 1$, 2.71828

اللوغاريتم الاعتيادي :

يسمى اللوغريتم للأساس 10 باللوغاريتم الاعتيادى ويرمز له بالرمز log

حيث :-

$$\log_{10} x = \log x$$

ويستخدم عادة في الحسابات ومن خواصه :

$$\log 10 = 1$$

$$\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2$$

$$\log 1000 = \log 10^3 = 3 \log 10 = 3$$

$$\log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -\log 10 = -1$$

$$\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2 \log 10 = -2$$

العلاقة بين اللوغاريتم الطبيعي واللوغاريتم الاعتيادي:

بفرض أن : $y = e^x$ (1)

بأخذ اللوغاريتم الاعتيادى للطرفين للمعادلة (1)

$\therefore \log y = x \log e$

$\therefore x = \log y / \log e$ (2)

بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للمعادلة (1)

$\therefore \ln y = x \ln e = x$

$x = \ln y$ (3)

من (2) , (3) نستنتج أن :-

$\ln y = \log y / \log e$

$= 2.3 \log y$

مثـــال :

إذا علمت أن : $\log 100 = 2$ فأوجد $\ln 100$

الحـــل :

$\ln 100 = 2.3 \log 100$

$\ln 100 = 2.3\ (2)$

$\therefore \ln 100 = 4.6$

تمارين (26)

1 - ضع المعادلات الآتية فى الصيغة اللوغاريتيمة :-

(a) $2^4 = 16$ (b) $3^4 = 81$

(c) $(\frac{1}{2})^3 = 8^{-1}$ (d) $(\frac{1}{2})^{-3} = 8$

(e) $(64)^{\frac{2}{3}} = 16$ (f) $a^x = y$

(g) $e^x = 5$ (h) $e^{x^2} = y$

2 - ضع المعادلات الآتية فى الصيغة الأسية :-

(a) $\log_{16} 10 = 1$ (b) $\log_5 625 = 4$

(c) $\log_a x = 2$ (d) $\log_a 4 = 2$

(e) $\log_a 3 = 0.49$ (f) $\log_a 1 = 0$

(g) $\ln 25 = x$ (h) $\ln x = y$

3 - عبر عن اللوغريتمات التالية بدلالة اللوغاريتميين:-

$\ln 2 = a$

$\ln 3 = b$

(a) $\ln 16$ (b) $\ln 2\sqrt{2} \cdot 3$

(c) $\ln 0.25$ (d) $\ln \frac{4}{9}$

(e) $\ln 12$

(f) $\ln 4.5$

(g) $\ln \frac{4.5}{9}$ (h) $\ln \sqrt{13.5}$

4– حل المعادلات الآتية :

(a) $\log_4 (x - 2) - \log_4 (x + 2) = 1$

(b) $\log_2 (7 - x) - \log_2 (x + 2) = 2$

(c) $\log_7 3x + \log_7 (2x - 1) = \log_7 (16 x - 10)$

(d) $\ln x (x + 2) = 4$

5– أوجد مجال الدالة ثم إرسم الرسم البيانى لها لكل من :

(a) $F(x) = \log_2 (x - 1)$

(b) $F(x) = \log_3 (-x)$

(c) $F(x) = \log_{\frac{1}{2}} (2x - 1)$

(d) $F(x) = \log_{\frac{1}{3}} (-x)$

6 – أكتب التعبيرات الآتية على صورة لوغاريتم عدد واحد :

(a) $\log_5 \frac{21}{4} - \log_5 \frac{7}{2} + \log_5 \frac{8}{9}$

(b) $3 \log_4 10 - 2 \log_4 5$

(c) $3 \log_6 12 - 4 \log_6 9 + \frac{3}{2} \log_6 4$

7 – إثبت أن :

$$\log_{10} \frac{a^2}{bc} + \log_{10} \frac{b^2}{ca} + \log_{10} \frac{c^2}{ab} = 0$$

8 - إذا كان :-

$$\log_6 \frac{x + y}{7} = \frac{1}{2} (\log x + \log y)$$

إثبت أن :-

$$x^2 + y^2 = 47\, x\, y$$

9 - إذا كان :-

$$\frac{\log_{10} x}{2} = \frac{\log_{10} y}{3} = \frac{\log_{10} z}{5}$$

إثبت أن :

(a) $x\, y = z$ (b) $= y^2 z^2 = x^8$

10 - إذا كان

$$x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

إثبت أن :

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)$$

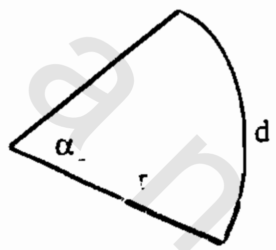
الدوال المثلثية

القياسات الدائريه والقياسات الزاوية:

أولا: القياسات الدائرية (Circular measure):

هو النسبة بين المسافة (d) مقاسة على المحيط إلى نصف القطر (r) وتكون وحداتها هى النصف قطرية (radian) والتى ليس لها أبعاد شكل 68.

$$\alpha = \frac{d}{r} \text{ rad}$$



شكل 68

ثانيا : القياسات الزوايه (Angular measure) :

حيث تقسم الزاوية المتواجدة فى مركز الدائرة إلى 360 قسم يعرف كل قسم بالدرجة وتكون وحدات هذه القياسات الدرجة °.

العلاقة بين القياس الدائرى والقياس الزاوى:

$$360^{\circ} = 2\,\Pi \text{ rad}$$

$$\therefore 1 \text{ rad} = 57.3^{\circ}$$

النسب المثلثية للمثلث القائم الزاويه بشكل 69 كما يلى:

$\text{Sin } \alpha = \frac{a}{c}$

$\text{Cos } \alpha = \frac{b}{c}$

$\text{Tan } \alpha = \frac{a}{b}$

$= \frac{\text{C Sin } \alpha}{\text{C cas } \alpha}$

$= \frac{\text{Sin } \alpha}{\text{Cos } \alpha}$

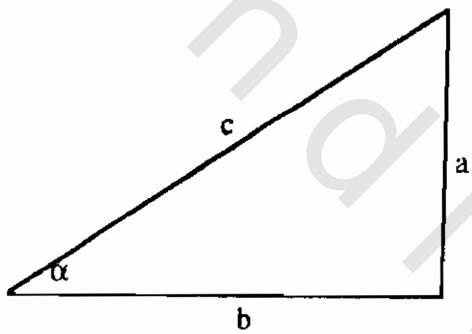
$\text{Csc } \alpha = \frac{c}{a}$

$\text{Sec } \alpha = \frac{c}{b}$

$\text{Cotan } \alpha = \frac{b}{a}$

$= \frac{\text{C Cos } \alpha}{\text{C Sin } \alpha}$

$= \frac{\text{Cos } \alpha}{\text{Sin } \alpha}$



شكل 69

$\text{Sin}^2 \alpha + \text{Cos}^2 \alpha = 1$

$\text{Tan}^2 \alpha + 1 = 1/\text{Cos}^2 \alpha = \text{Ses}^2 \alpha$

$1 + \text{Cot}^2 \alpha = 1 / \text{Sin}^2 \alpha = \text{Csc}^2 \alpha$

$\text{Tan } \alpha . \text{ Cot } \alpha = 1$

مجمــوع وفرق الزوايا :

$$\sin(\alpha \pm B) = \sin\alpha \; \cos B \pm \cos\alpha \sin B$$

$$\cos(\alpha \pm B) = \cos\alpha \,.\, \cos B \; \mp \sin\alpha \; \sin B$$

$$\sin\alpha + \sin B = 2 \sin\frac{\alpha + B}{2} \,.\, \cos\frac{\alpha - B}{2}$$

$$\cos\alpha \qquad = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

الدوال المثلثية لبعض الزوايا الهامة :

يبين شكل (70) بند 10 النسب المثلثية للزوايا الهامة.

العلاقة بين دالة الجيب ودالة جيب التمام (Sine & Cosine):

يبين هذه العلاقة شكل رقم (70) البندين e11 , e12 عندما تكون K = 1 , A = 1 . وأيضا شكل العلاقة بالنسبة للجيب (Sine α) عندما تكون A - 1.5 , A = 2 كما يظهر فى نفس الشكل أن منحنى جيب التمام (Cosine) هو نفسه منحنى الجيب (Sine) مع إزاحة مقدارها $\frac{\Pi}{2}$ -

Functions of the more important angles

10

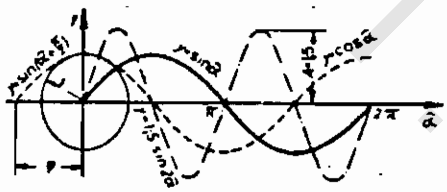
angle a	0°	30°	45°	60°	75°	90°	180°	270°	360°
sin a	0	0.500	0.707	0.866	0.966	1	0	-1	0
cos a	1	0.866	0.707	0.500	0.259	0	-1	0	1
tan a	0	0.577	1.000	1.732	3.732	∞	0	∞	0
cot a	∞	1.732	1.000	0.577	0.268	0	∞	0	∞

Relations between sine and cosine functions

Basic equations

e 11 Sine function $y = A \sin(ka - \phi)$

e 12 Cosine function $y = A \cos(ka - \phi)$



—— aine curve with an A = 1 and k = 1

—·— sine curve ampll ude of A = 1.5 and k = 2

- - - cosine curve A = 1 and k = 1

or aine curve with a phase shift of $\phi - \frac{\pi}{2}$

شكل 70

الدوال المثلثية للزوايا المختلفة:

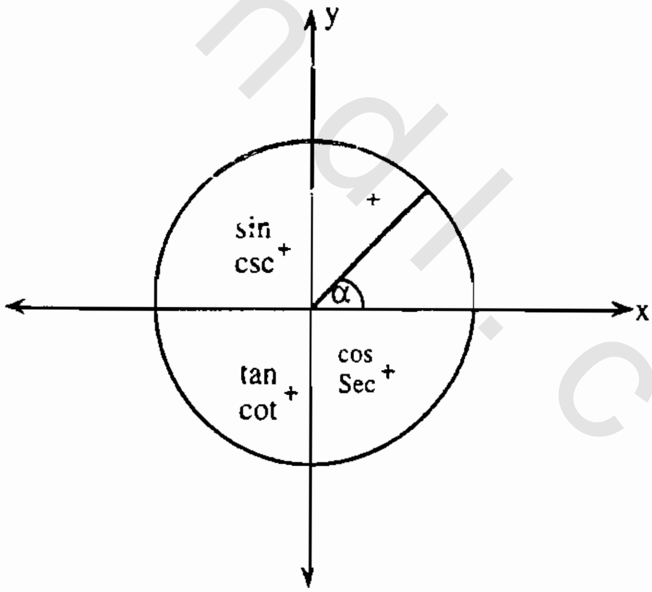
أى زاوية ممكن أن تكون فى ربع واحد من الأربعة أرباع. وتتوقف إشارة النسبة المثلثية على هذا الربع كالتالى شكل (71).

1- فإذا كانت الزاوية فى الربع الأول تكون جميع النسب المثلثيه موجبة.

2 - إذا كانت الزاوية فى الربع الثانى تكون النسب المثلثية الموجبة هى Csc , Sine وبقية النسب المثلثية سالبة.

3 - إذا كانت الزاوية فى الربع الثالث تكون النسب المثلثية الموجبة هى Cot , Tan وبقية النسب المثلثية سالبة.

4- إذا كانت الزاويه فى الربع الرابع تكون النسبة المثلثية الموجبة هى Sec , Cos وبقية النسب المثلثية سالبة.



شكل 71

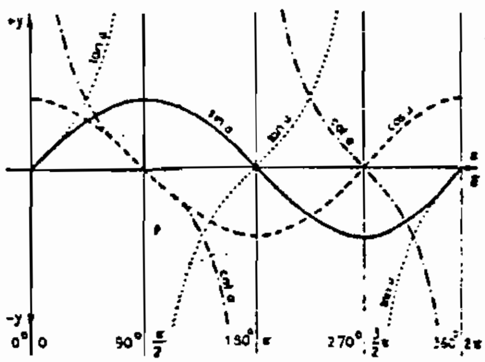
وتكون النسبة المثلثية في شكل (72) وفي جزئه العلوى يبين قيمة الدوال في حالة ما إذا كانت الزاوية محصورة بين الصفر °90 أو °90 , °180 أو , °270 °180 أو 270 , 360 . وأيضا في حالة تكرار الزاوية °360.

كما يبين الشكل في جزئه السفلى الشكل البياني للدوال المختلفة (cost, tan, cot, sine للزاوية α في كل الأرباع أي ابتداءا من الصفر وحتى°360 .

FUNCTIONS OF A CIRCLE — **E3**

Quadrants

sin (90° - a)	+	=	cos a	sin (90° + a)	=	-	cos a
cos (90° - a)	+	=	sin a	cos (90° + a)	=	-	sin a
tan (90° - a)	+	=	cot a	tan (90° + a)	=	-	cot a
cot (90° - a)	+	=	tan a	cot (90° + a)	=	-	tan a
sin (180°-a)	+	=	cos a	sin (180° + a)	=	-	cos a
cos (180°-a)	-	=	sin a	cos (180° + a)	=	-	sin a
tan (180°-a)	-	=	cot a	tan (180° + a)	=	-	cot a
cot (180°-a)	-	=	tan a	cot (180° + a)	=	-	tan a
sin (270° - a)	-	=	cos a	sin (270° + a)	=	-	cos a
cos (270° - a)	-	=	sin a	cos (270° + a)	=	-	sin a
tan (270° - a)	+	=	cot a	tan (270° + a)	=	-	cot a
cot (270° - a)	+	=	tan a	cot (270° + a)	=	-	tan a
sin (360° - a)	-	=	cos a	sin (360° + a)	=	-	cos a
cos (360° -a)	+	=	sin a	cos (360° + a)	=	-	sin a
tan (360°-a)	-	=	cot a	tan (360° + a)	=	+	cot a
cot (360°-a)	-	=	tan a	cot (360° + a)	=	+	tan a
sin (- a)	-	=	cos a	sin (a ± n x 360°)	=	-	cos a
cos (- a)	+	=	sin a	cos (a ± n x 360°)	=	-	sin a
tan (- a)	-	=	cot a	tan (a ± n x 180°)	=	-	cot a
cot (- a)	-	=	tan a	cot (a ± n x 180°)	=	-	tan a



شكل 72

المجال (D_F) والمدى(R_F) لبعض الدوال المثلثية :

نجد من شكل (72) فى الشكل البيانى الآتى:

1 - $F(a) = \text{Sin } a$

$\therefore D_F = R$

, $R_F = [-1, 1]$

2- $F(a) = \text{Cos } a$

$\therefore D_F = R$

, $R_F = [-1, 1]$

3- $F(a) = \text{Tan } a$

$$= \frac{\sin a}{\cos a}$$

$\therefore D_F = \{ R - \{\text{أصفار المقام}\} \}$

أى أن الزاويه تخضع للعلاقة :

$$a = (2n + 1)\frac{\Pi}{2} \quad , \quad n \in z$$

z جميع الأعداد الصحيحة .

, $R_F = R$

حيث R مجموعة الأعداد الحقيقية.

تماريــــــن (27)

1 - إرسم الدوال الآتيه :

(a) sin x (b) cos x (c) tan x

فى الفترة [0 , 2 Π]

2- أوجد قيمة كل من الدوال الآتيه :-

sin 15	sin 95	sin 200
cos 15	cos 59	cos 200
tan 15	tan 95	tan 20

3 - أوجد قيمة الزوايا بالقياسات الدائرية والقياسات الزاوية لكل من :

(a) r = 15

وطول القوس 25

(b) r = 30

وطول القوس 50

(c) r = 90

وطول القوس 250

(d) r = 120

وطول القوس 720

ملحوظة: وحدة الأطوال تؤخذ بالملليمتر

4 - أوجد المجال لكل من الدوال الآتيه:

(a) F(x) = sin x + cos x

(b) F(x) = tan x

(c) $F(x) = \sin^2 x$

(d) $F(x) = \ln(\sin x)$

(e) $F(x) = \dfrac{\sin x}{\ln x}$

(f) $F(x) = \dfrac{|\sin x|}{\sin x}$

(g) $F(x) = \dfrac{\ln x}{\sin x}$

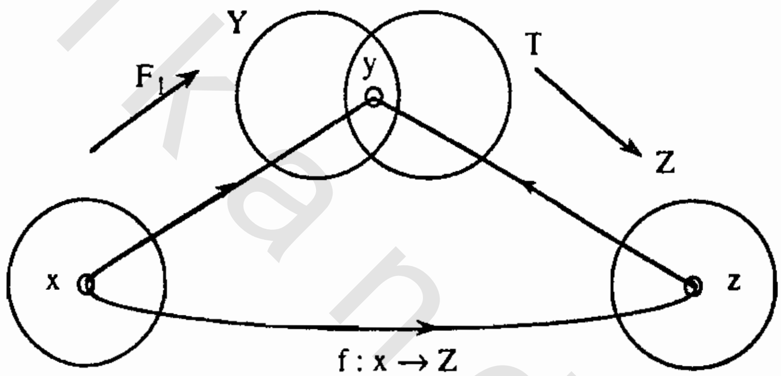
(h) $F(x) = \dfrac{\tan x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$

تحصيل الدوال (الدالة التركيبية)

إذا كانت $f_1(x)$, $f_2(x)$ دالتين حقيقيتين وكان :

1 - مدى $f_1(x)$ (R_{f1}) $\cap$ مجال $f_2(x)$ $(D_{F2}) \neq \phi$ فإنه يمكن تحصيل الدالتين $F_1(x)$ لإيجاد الدالة المحصلة أو الدالة التركيبية (شكل 73):

$$f = f_2(x) \circ f_1(x)$$
$$= f_2(f_1(x))$$



شكل 73

من الشكل يتضح أن :

$F_1(x) = y$, $F_2(y) = z$

$$F_2(x) \circ (F_1(x)) = F_2(F_1(x))$$
$$= F_2(y)$$
$$= z$$

2 - مدى $f_2(x)$ (R_{f2}) $\cap$ مجال $F_1(x)$ $(D_{f1}) \neq \phi$ فإنه يمكن إيجاد أيضا:-

$F_1 \ o \ F_2 (x) \quad = F_1 (f_2(x))$

وينتج من التعريف أن :-

$D_{f_1 0 f_2} = \{ x : x \in D_{F_2} \ , f_2 \ (x) \in D_{f_1} \}$

مثـــــال 1 :

إذا كانت $F_1 (x)$, $F_2 (x)$ دالتين معرفتين على المجموعة X

$X = \{ a , b , c \}$
$F_1 = (a , b) , (b , c) , (c ,)$
$F_2 = (a, a) , (b , a) , (a , b)$

فأوجد الآتى :

(a) $F_2 \, o \, F_1$ (b) $F_1 \, o \, F_2$

(c) $R_{f_2 0 f_1}$ (d) $R_{f_2 0 f_1}$

الحــــل :

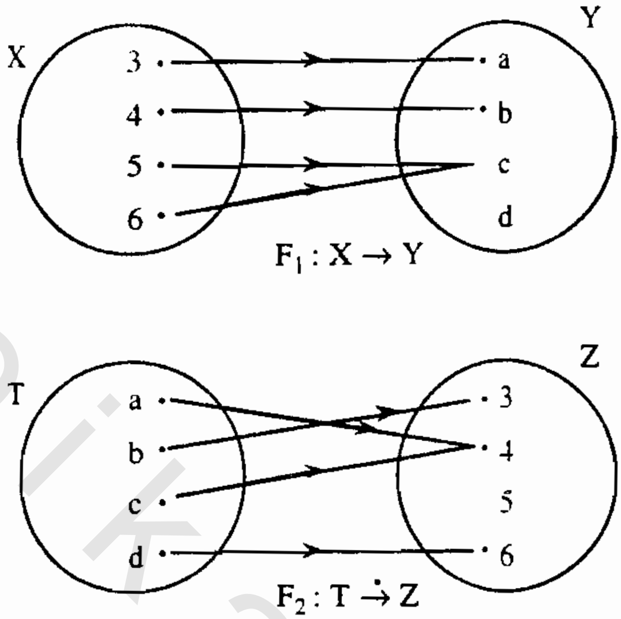
(a) $F_2 \ o \, F_1 = f_2 \ (f_1)$
$= (a , a) , (b , a) , (c , b)$
(b) $F_1 \, o \, F_2 = F_1 \ (F_2)$
$= (a , b), (b , c) , (c , c)$
(c) $R_{f_2 0 f_1} = \{a , b \}$
$R_{f_1 0 f_2} = \{ b , c\}$

نلاحظ من المثال السابق أن :

$F_2 \, o \, F_1 \neq F_1 \, o \, F_2$

مثـــــال 2:

F_1 , F_2 دالتين معرفتين كما بالشكل (شكل 74)



شكل 74

أوجد الآتى:

(a) $F_2 \circ F_1$ (c) $F_1 \circ F_2$

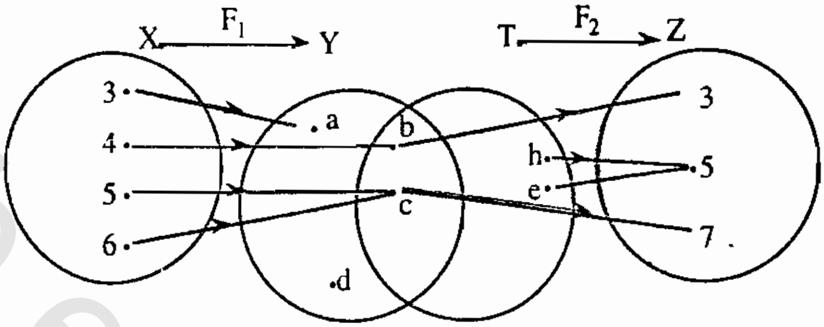
(b) $D_{f_2 \circ f_1}$ (d) $D_{f_1 \circ f_2}$

الحـــــل :

(a) $F_2 \circ F_1 = F_2 (F_1)$

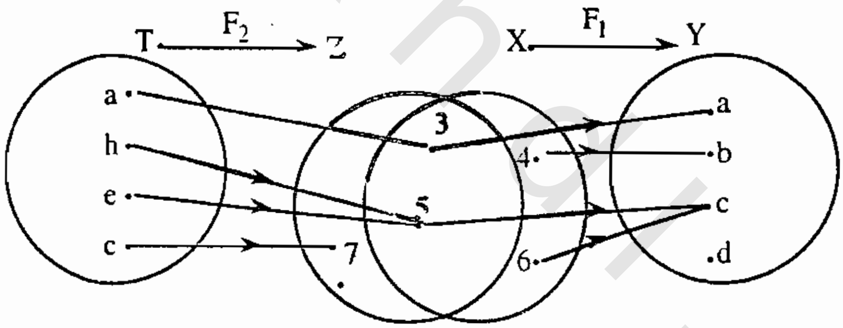
$= \{ (4 , 3) , (5 , 7) , (6 , 7) \}$ ..... شكل 75

(b) $D_{f_2 \circ f_1} = \{ 4 , 5 , 6 \}$



F2 o F1 : x → z

شكل 75



$F_1 \circ F_2 : T \rightarrow Y$

شكل 76

(c) $F_1 \circ F_2 = F_1\ (F_2)$

= (h, c) , (b , a) , (e , c) .... 76 شــــكل

(d) $D_{f_1 0 f_2} = \{b , h , e\}$

نلاحظ من المثال الآتى:-

1- $F_2 0 F_1 \neq F_1 0 F_2$

2 - $3 \notin D_{f_2 0 f_1}$

3- $c \notin D_{f_1 0 f_2}$

مثـــــال 3 :

a - اذكر مجال كل من الدالتين الحقيقيتين F_1 , F_2 المعرفتين كالآتى:

$F_1 (x) = 5 - x^2$

$F_2 (x) = \sqrt{x - 1}$

b- أوجد أيضـــــا ً:

$D_{f_2 0 f_1}$, $F_2 o F_1$

$D_{f_1 0 f_2}$ $F_1 o F_2$

الحـــــل :

a- $F_1 (x) = 5 - x^2$

$D_{f_1} = R$

$F_2(x) = \sqrt{x - 1}$ $\therefore x \geq 1$, $D_{f_2} = [1 , \infty)$

b- $= f_2 o f_1 (x) = f_2 (f_1 (x))$

$= f_2 (5 - x^2)$

$\therefore F_2 \circ F_1 (x) = \sqrt{5 - x^2 - 1}$

$= \sqrt{4 - x^2}$

II $D_{f_2 0 f_1}$:

$4 - x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 4$

$2 \le x \le 2$

$\therefore D_{f\,o\,f} = [-2, 2]$

III $F_1 \, o \, F_2 = F_1(F_2)$

$\because F_2(x) = \sqrt{x-1}$

$, F_1(x) = 5 - x^2$

$\therefore F_1 \, o \, F_2 = 5 - (\sqrt{x-1})^2$

$= 5 - (x - 1)$

$= 6 - x$

IV $\therefore D_{f_1 o f_2} = \{ x : x \in D_{f_2} , F_2(x) \in D_{f_1} \}$

$= [1, \infty)$

مثـــــال 4 :

أوجد $g(x)$ إذا كان :

$f(x) = \sqrt{x-1} \quad , \quad f \, o \, g(x) = x^2$

الحـــــل :

$f \, o \, g(x) = x^2$

$= F(g(x))$

$\because F(x) = \sqrt{x-1}$

$\therefore F(g(x)) = \sqrt{g(x) - 1}$

$\therefore \sqrt{g(x) - 1} = x^2$

$\therefore g(x) = x^4 + 1$

مثـــــال 5 :

إذا كان :-

$F(x) = \dfrac{\ln x}{x - 2}$

$$g(x) = \frac{1}{x-1}$$

أوجـــد $F \circ g(x)$

الحـــل :

$$F \circ g(x) = F(g(x))$$

$$= \frac{\ln g(x)}{g(x) - 2}$$

$$= \frac{\ln \frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x-1} - 2}$$

$$= \frac{\ln 1 - \ln (x-1)}{\frac{1-2(x-1)}{x-1}}$$

$$= \frac{0 - \ln (x-1)}{-2x+3} \cdot (x-1)$$

$$= \frac{(x-1)}{(3-2x)\ln (x-1)}$$

تمارين (28)

1 - إذا كانت :-

$F_1 = \{ (1, 2), (2, 2), (3, 1) \}$
$F_2 = \{ (1, 1), (2, 3), (3, 3) \}$

دالتين معرفتين على المجموعة X حيث:

$X = \{ 1, 2, 3\}$

فأوجد :

$F_2 \circ F_1 \quad , F_1 \circ F_2$

2 - إذا كانت f , g دالتين معرفتين على مجموعة الأعداد الحقيقية:-

$F(x) = 3 \qquad , g(x) = 3x$

فاذكر مجال ومدى كل من :-

$f \circ g \qquad , g \circ f$

وأوجد قيمة :

$g \circ f(2) \quad , \quad f \circ g(2) \quad , \quad \mathbf{f \circ f(2)} \quad , \quad g \circ g(2)$

3 - إذا أعطيت $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x-1}$ فأوجد قيمة :-

(a) $f \circ g(3)$

(c) $f \circ g(\frac{1}{3})$

4 - أوجد $f \circ g(x)$, $g \circ f(x)$ فى الحالات الآتية:

(a) $F(x) = \sqrt{x} + 1 \quad , \quad g(x) = x^2$

(b) $F(x) = 2 + \sqrt{x} \quad , g(x) = (x-2)^2$

5 - إذا كانت :-

$$F(x) = \frac{x+1}{x-2} \quad , \quad g \circ f(x) = \frac{3}{x-2}$$

أ وجد قيمـــــة $g(x)$

6 - أوجد مجال ومدى الدوال الآتية :

$F_1 \quad , \quad F_2 \quad , \quad F_1 \circ F_2 \quad , \quad F_2 \circ F_1$

وذلك إذا كان :

$F_1(x) = \sqrt{x-1}$

$F_2(x) = x^2 + 1$

أوجد أيضا قيمة :

$F_1(2) \quad , \quad F_2(2) \quad . \quad F_2 \circ F_1(2) , F_1 \circ F_2(2)$

7 - إذا كانت :

$F_1(x) = \sqrt{2x-5}$

$F_2(x) = \frac{1}{x}$

فأوجـــــد :

(a) $F_2 \circ F_1(x) \quad , \quad F31 \circ F_2(x)$

(b) $D_{f_2 \circ f_1} \quad , \quad D_{f_1 \circ f_2}$

8 - إذا كانت :

$f(x) = x^2 \quad , \quad -\infty < x < \infty$

$g(x) = \sin x \quad -\infty < x < \infty$

أوجـــــد :

$f \circ g(x) \quad , \quad g \circ f(x)$

الدوال العكسية :

درسنا فيما سبق الدالة الحقيقية وعرفنا أن معكوس الدالة الحقيقية ليس بالضرورة دالة.

وعلى أية حال نستطيع القول بأن العلاقة العكسية للدالة تكون أيضا دالة إذا كان :

$$1 - F(x_1) = F(x_2) \quad \rightarrow \quad x_1 = x_2$$

أو

$$2- x_1 \neq x_2 \quad \rightarrow \quad F(x_1) \neq F(x_2)$$

حيث x_2 , x_1 فى مجال الدالة F (تعرفا بالقاعدة (1) أو القاعدة (2))

وتسمى الدالة F فى هذه الحالة بالدالة الآحادية وتسمى الدالة F^{-1} معكوس الدالة F

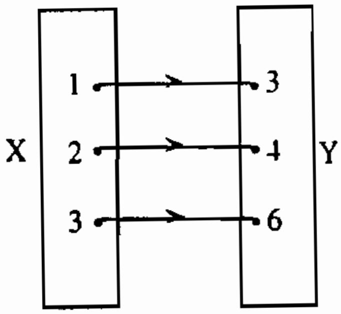
فمثلا إذا كان :

$$F_1 = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 6) \}$$

يكون المعكوس لها F_1^{-1} حيث

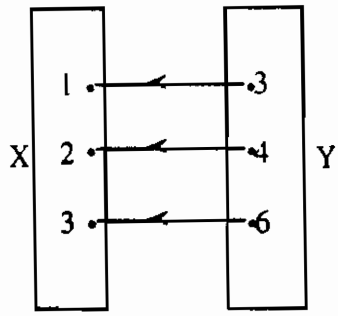
$$F_1^{-1} = \{ (3,1), (4,2), (6,3) \}$$

ويمكن تمثيلهما بالمخطط السهمى كالتالى (شكل 77 ، شكل 78).



$F_1 = X \rightarrow Y$

شكل 77



$F_1^{-1} = Y \rightarrow X$

شكل 78

حيث X المجال ، Y المدى للدالة F_1

, Y المجال ، X للدالة F_1^{-1}

وعلى ذلك نجد أن :-

$F_1\ (3) = 6$

$F_1^{-1}\ (3) = 1$

إذ أن العنصر x = 3 ينتمى إلى X وينتمى أيضا إلى Y

$\therefore\ F_1\ (F_1^{-1}\ (3)\ ) = 3$ I

$,\ F_1^{-1}\ (F_1\ (3)) = F_1^{-1}\ (6)$

$= 3$ II

من I , II نستنتج أن :-

$F_1\ (F_1^{-1}\ (3)) = F_1^{-1}\ (F_1\ (3)\ )$

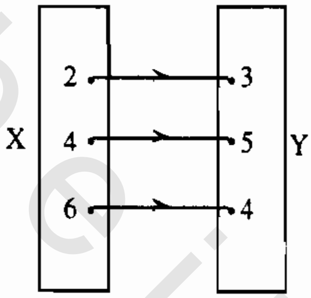
مثالا آخر يؤكد هذا الاستنتاج:

$F_2 = \{\ (2, 3)\ ,,\ (4. 5)\ ,\ (6\ ,\ 4)\ \}$

ويكون المعكوس للدالة F_2 هو F_1^{-1} حيث :-

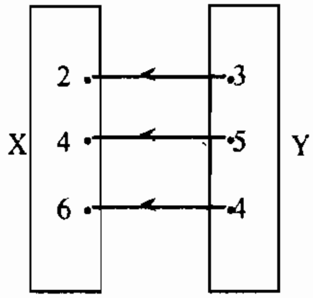
$F_2^{-1} = \{\ (3, 2)\ ,\ (5\ ,4),\ (4, 6)\ \}$

يمثلهما شكل 79 شكل 80 على الترتيب



$F_2 : X \rightarrow Y$

شكل 79



$F_2^{-1} : Y \rightarrow X$

شكل 80

وعلى ذلك نجد أن :

$F_2 (4) = 5$

$F_2^{-1} (4) = 6$

حيث العنصر 4 = x ينتمى إلى X وينتمى أيضا إلى Y

$F_2 (F_2^{-1} (4) = F_2 (6)$

$= 4$ III

$F_2^{-1} (F_2 (4)) = F_2^{-1} (5)$

$F_2^{-1} (F_2 (4)) = 4$ IV

من III , IV نستنتج أن :

$(F_2^{-1} (4)) = F_2 (F_2^{-1} (4))$

من I , II في المثال الأول F_1 , III, IV في المثال الثانى F_2 نستطيع

أن نستنتج هذا التعريف :

إذا كانت F دالة أحادية مجالها X ومداها Y فإن الدالة F^{-1} التى مجالها

Y ومداها X تسمى الدالة العكسية للدالة F إذا كان لجميع $x \in Y$

3- $F(F^{-1}(x) = x$

4- $F^{-1}(F(x) = x$

مثـــال 1:

إذا كانت :-

$F_1 = \{ (1, 3), (2. 4), (3, 6) \}$

$F_2 = \{ (2, 3) , (4, 5) , (6 , 4) \}$

فأوجـــــد :

F_1^{-1} , F_2^{-1} مع رسم كل دالة ومعكوسها على الرسم البيانى واكتب

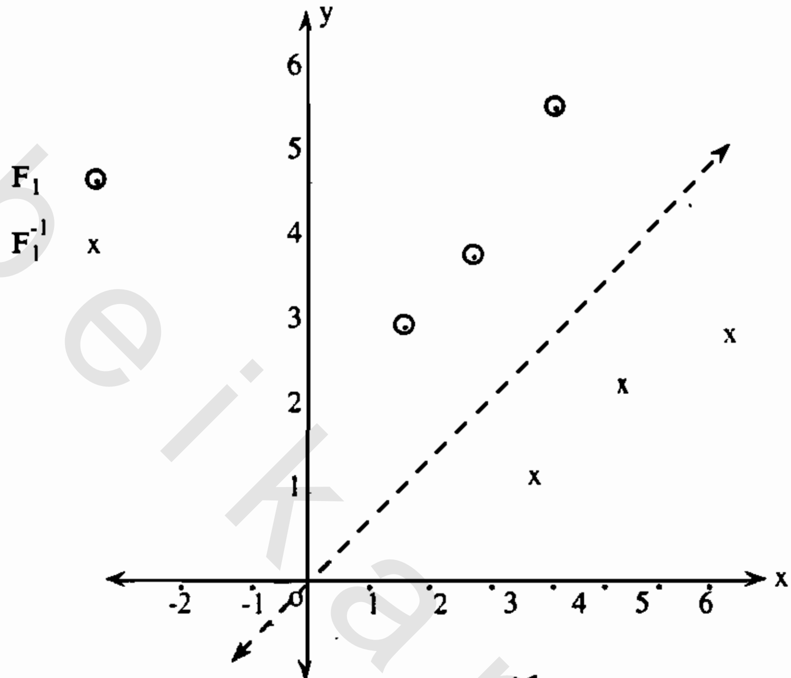
ملاحظاتك.

الحـــــل :

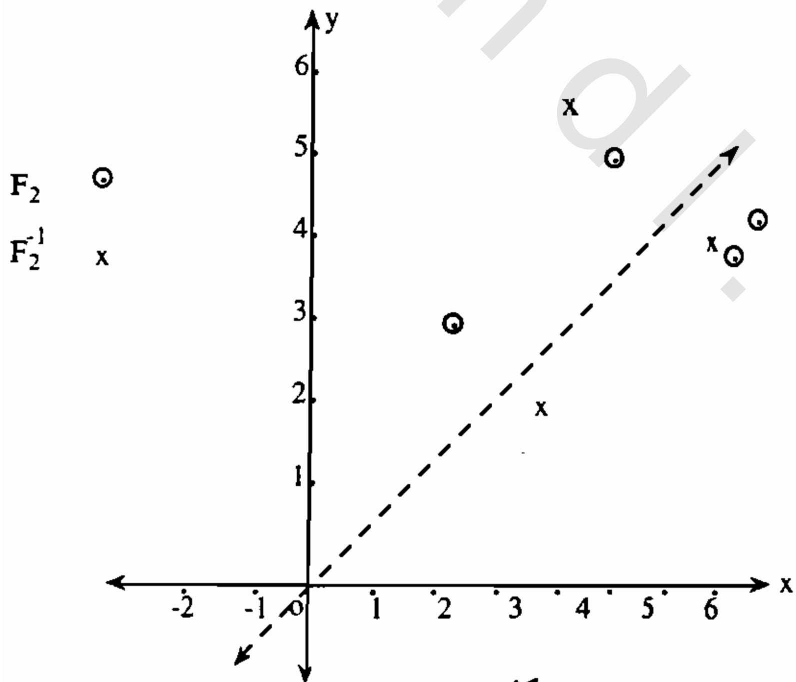
$F_1^{-1} = \{ (3, 1) . (4, 2) , (6, 3) \}$

$F_2^{-1} = \{ (3, 2) . (5, 4) , (4, 6) \}$

ويمثلهما شكل 81 ، شكل 82 على الترتيب .


y
6
5
4
3
2
1
x
-2
-1
o
1
2
3
4
5
6
F1
F1-1
x
x
x
x

شكل 81


y
6
5
4
3
2
1
x
-2
-1
o
1
2
3
4
5
6
F2
F2-1
x
x
x
x

شكل 82

من الرسم البيانى نجد أن الدوال F_2 , F_1^{-1} متماثلين بالنسبة للمستقيم $y = x$ وكذلك F_2 , F_2^{-1} متماثلين بالنسبة للمستقيم $y = x$ أى أن : الدالة والدالة العكسية لها متناظرتان بالنسبة للمستقيم $y = x$ أى كل منهما صورة للأخرى على الخط العاكس $y = x$.

مثـــال 2:

إذا كانت :-

$$F = \{ (1, -2), (2, 0), (3, -3), (4, 1) \}$$
$$F^{-1} = \{ (-2, 1), (0, 2), (-3, 3), (1, 4) \}$$

إثبت صحة المعادلات

1- $F(F^{-1}(x)) = x$

2- $F^{-1}(F(x)) = x$

لجميع قيم x المنتميه إلى Y

الحـــل :

$$F(1) = -2$$

$$F^{-1}(1) = 4$$

$F(F^{-1}(1) = F(4) = 1$ (المعادلة 1)

$F^{-1}(F(1)) = F^{-1}(-2) = 1$ (المعادله 2)

∴ المعادلتين صحيحتين عند $x = 1$ المنتمية إلى y

مثـــال 3 :

إذا كانت : $F = 2 - 3x$

إثبت أن F^{-1} دالة

الحـــــل

نفرض أن x_1 ، x_2 فى مجال F

$$\therefore F(x_1) = 2 - 3x_1$$
$$F(x_2) = 2 - 3x_2$$

فإذا كان $F(x_1) = F(x_2)$

$$\therefore 2 - 3x_1 = 2 - 3x_2$$

$$x_1 = x_2$$

∴ الدالـة أحـاديـه ويكون لهـا مـعـكوس هو F^{-1} يكون أيضـا دالة وفـقـا للقاعـدة رقـم 1.

إختبار الدالة من حيث كونها إحاديه أم غير أحاديه:

يمكن اختيار الدالة F من حيث كونها إحادية أم لا وذلك بعد رسمها بيانيا وبإستخدام خط مستقيم يوازى محور السينات، فإذا قطع هذا الخط الدالة فى أكثر من نقطة فهذا معناه أن المكون الثانى للدالة F (الاحداثى الثانى) هو نفسه – أى أن للدالة F أكثر من زوج واحد بنفس المكون – هذا معناه أن الدالة F ليست أحادية وأن F^{-1} غير موجودة.

مثـــال :

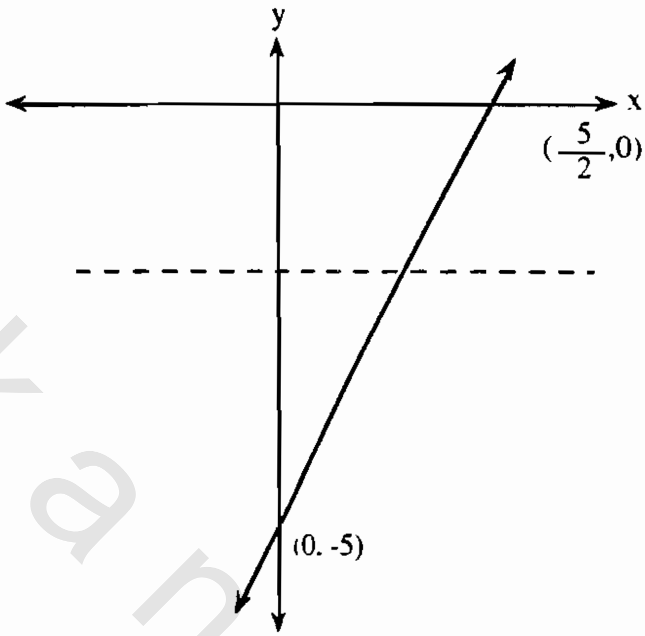
إثبت أن الدالة F المعرفة بالقاعدة:

$$F(x) = 25 - 5$$

أحادية بيانيا.

الحـــل :

نرسم الدالة بيانيا . شكل 83



83

نلاحظ أن أى مستقيم يوازى محور السينات يقطع الداله فى نقطه واحدة وبالتالى فإن الدالة F داله أحاديه.

الدوال الصريحة والدوال الضمنية:

إذا كانت الدالة على الصورة:

$$y = F(x)$$

تسمى دالة دالة صريحة حيث ذكرت الدالة y صريحة بدلا له x.

مثال ذلك:

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$$

$$y = \tan x$$

$$y = a^x$$

$$y = \ln x$$

حيث أمكن وضع المتغير المتسقل فى طرف والمتغير التابع فى الطرف الآخر.

أما إذا كانت المعادلة على الصورة :

$$f(x, y) = 0$$

مثـــال ذلك :

$$x^2 - (y + 1)\ x + y^2 - y + 6 = 0$$

أى أن كلا من المتغير المتسقل x والمتغير التابع y ظهرا فى طرف واحد من المعادلة ولا يمكن فصلهما عن بعض حيث المتغير y واقع ضمنيا فى x ومثل هذه الدالة تسمى دالة ضمنية . مثال ذلك:

$$\frac{y\,a^x}{x + 1} = 0$$

$$y^2 - x\,y + x^2 = 0$$

وقد تكون الدالة على شكل صورة ضمنية ولكن يمكن كتابتها على صورة دالة صريحة مثال ذلك:

$$x\,y - x + y + 1 = 0 \quad , \quad y \neq -1$$

فيمكن كتابتها على الصورة .

$$x - 1 = x\,y + y$$
$$= y\,(x + 1)$$
$$\therefore y = \frac{x - 1}{x + 1}$$

مثـــــال :

إذا كانت دالة معرفة ضمنية بالمعادلة:

$$x + 4 = \sqrt{y^2 - 16}$$

اكتب المعادلة فى الصورة الآتية:

$$y = f\,(x)$$

الحـــــل :

بتربيع طرفى المعادلة:

$$(x + 4)^2 = y^2 - 16$$
$$\therefore x^2 + 8\,x + 16 = y^2 - 16$$
$$\therefore y^2 = x^2 + 8\,x + 32$$
$$y = \sqrt{x^2 + 8\,x + 32}$$

الدالة الزوجية والدالة الفردية:

أ- الدالة الزوجية :

يقال للدالة الحقيقية بأنها دالة زوجية إذا كان :

$$F(x) = F(-x) \qquad , x \in D_F$$

بمعنى إنه إذا وضع x- فى معادلة الدالة بدلا من x وكانت قيمة الدالة لا تتغير سميت هذه الدالة بالدالة الزوجية.

مثـــال 1 :

إثبت أن الدالـــة :

$$F(x) = x^2$$

دالة زوجية . ثم إرسم الدالة

الحـــــل :

$$F(-x) = (-x)^2 = x^2$$

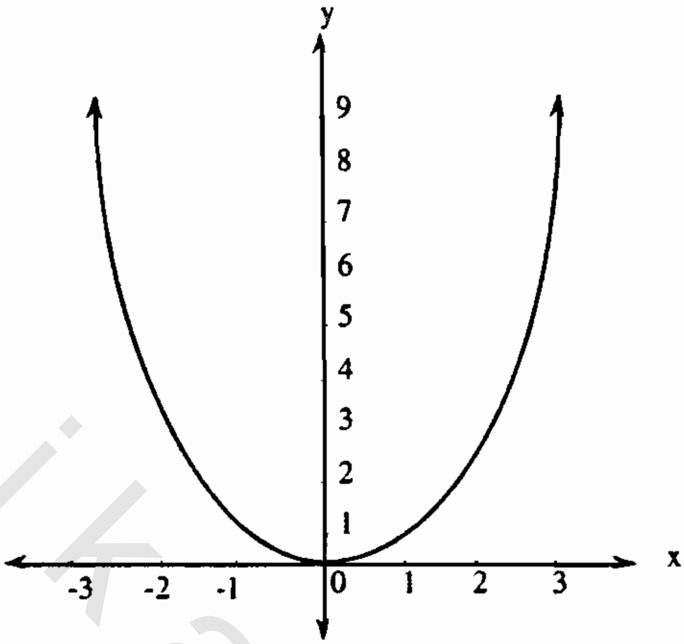
$$\therefore F(-x) = F(x)$$

وبالتالى تكون الدالة زوجية

ولرسم الدالة بيانيا يتم عمل الجدول الآتى:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	0	1	4	9	1	4	9

شكل 84 يوضحه بيانيا .



شكل 84

مثـــــال 2 :

إثبت أن الدالة :

$$F(x) = 3\,x^4 + 2\,x^2 + 1$$

دالة زوجية . ثم إرسم الدالة وادرس تماثل المنحنى حول المحور y

الحــــل :

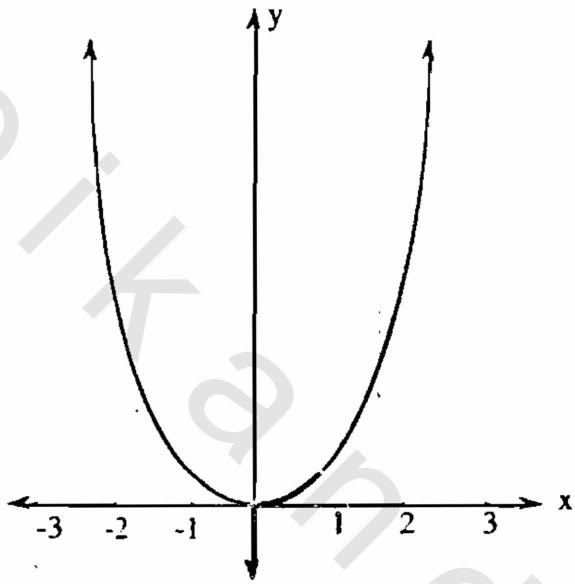
$$F(-x) = 3\,(-x) + 2\,(-x\,)^2 + 1$$
$$= 3\,x^4 + 2\,x^2 + 1$$
$$= F(x)$$

∴الدالة زوجيـــــة

ولرسم بيانيا يتم عمل الجدول الآتى: -

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	6	57	243	6	57	243

وشكل 85 يوضحه بيانيا.



شكل 85

ومن الرسم نلاحظ أن :

منحنى متماثل حول المحور y أي أن المحور y يمكن إعتباره خط مرآه عاكس لأى من الجهتين.

مثـــال 3 :

إثبت أن :

$f(x) = |x| \qquad , x \in R$

دالة زوجية

الحـــل :

$$F(-x) = |-x| = |x| = F(x)$$

∴ الدالة زوجية

ب- الدالة الفردية :

يقال للدالة الحقيقية $F(x)$ بأنها فردية إذا كان :-

$$F(-x) = -F(x) \quad , x \in F$$

مثال 4 :

إثبت أن :

$$F(x) = x^3$$

دالة فردية:

الحـــل:

$$F(-x) = (-x^3)$$
$$= -x^3 = -F(x)$$

∴ الدالة حسب التعريف دالة فردية

مثال 5 :

إثبت أن الدالة

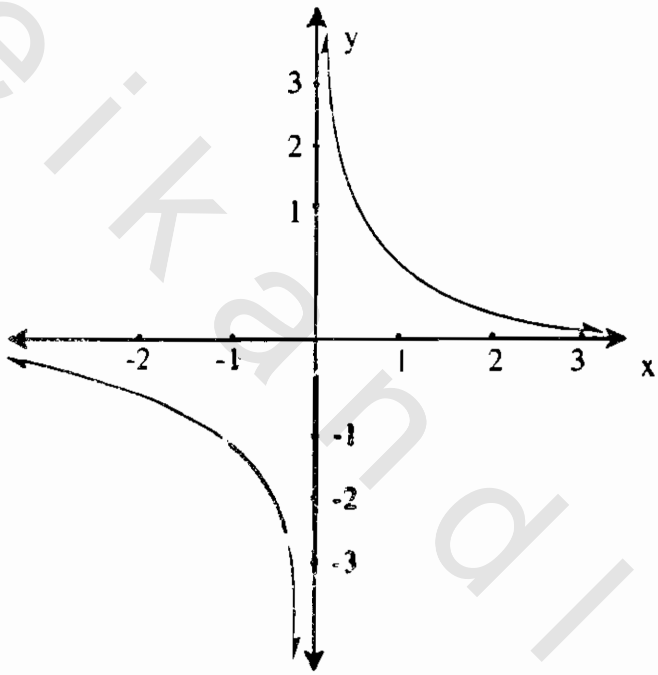
$$F(x) = \frac{1}{x}$$

دالة فردية ثم إرسم المنحنى البيانى لها وادرس تماثله حول نقطة الأصل.

الحل: يتم عمل الجدول الآتى:

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
F(x)	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

يوضحه الرسم البيانى شكل 68



شكل 86

من الرسم نلاحظ أن منحنى الدالة F متماثل حول نقطة الأصل . أى أن كل من نصفى منحنى الدالة F هو صورة مقلوبة للنصف الآخر (الانعكاس فى نقطة الأصل).

ملاحظات هامه:

1 - من الممكن أن تتواجد دوال ليست زوجية ولا فردية.

2 - مجموع دالتين زوجيتين هو دالة زوجية.

3 - مجموع دالتين فرديتين هو دالة فردية.

4 - حاصل ضرب دالة زوجيه وأخرى فردية هو دالة فردية.

5 - حاصل ضرب دالتين زوجيتين هو دالة زوجية.

6 - حاصل ضرب دالتين فرديتين هو دالة زوجية.

تمارين (30)

إبحث نوع كل من الدوال الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية:

1- $F(x) = 5$

2- $F(x) = 3x - 2x^3$

3- $F(x) = 2x^2 + 3x - 5$

4- $F(x) = x^4 - 2x^2 + 5$

5- $F(x) = \dfrac{x^3 + 5}{2x + 3}$

6- $F(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 1}$

7- $F(x) = x^5 (2x^2 + 1)$

8- $F(x) = x^5 - 5^{-x}$

9- $F(x) = \sqrt[3]{x^3 - 8x}$

10- $F(x) = \left(\dfrac{2x}{5} + \dfrac{5}{2x}\right)^2$

11- $F(x) = \dfrac{|x^3|}{x}$, $x \neq 0$

12- $F(x) = (\frac{1 + x}{1 - x})^3 + (\frac{1 - x}{1 + x})^3$

13- $F(x) = \frac{x^3}{\cos x}$

14- $F(x) = x^5 \sin^2 x$

15- $F(x) = \cot^2 x - \tan^2 x$

أوجد المدى وعين نوع كل من الدوال الآتية من حيث الفردية والزوجية:

1- $F(x) = \begin{cases} \frac{3}{2} & , x > 0 \\ \frac{3}{2} & , x > 0 \end{cases}$

2- $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - 3) & , x > 0 \\ \frac{1}{2}(x + 3) & , x < 0 \end{cases}$

3- $F(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & , x > 0 \\ x^3 - 1 & , x > 0 \end{cases}$

4- $F(x) = \begin{cases} (x + 1)^2 & , x < -1 \\ -(x - 1)^2 & , x > 1 \end{cases}$

5- $F(x) = \begin{cases} (x + 3)^2 & , 0 > x \geq -3 \\ (x - 3)^2 & , -3 \geq x > 0 \end{cases}$

النهـــــايات . Limits

مثال تمهيدى

أوجد قيمة:

$$\lim_{x \to 0}^{(1)} \left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

الحــــــل :

نلاحظ أن قيمة الدلة = $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ وهذه كمية غير معرفة لذلك لنجأ إلى طريقة الاقتراب من على يمين النقطة $x = 0$ وليكن من عند $x = 1$ ونستمر فى الاقتراب قربا كافيا من النقطة $x = 0$ ونوجد قيمة الدالة $(\frac{\sin x}{x})$ فى كل حالة، وكذلك من علىأ سار النقطة $x = 0$ وليكن من عند $x = -1$ ونستمر فى» لاقتراب قربا كافيا من النقطة $x = 0$.ويوضح ذلك الجدولين الآتيين:-

x	$\frac{\sin x}{x}$
1.0	0.8417
0.90	0.8704
0.80	0.8967
0.70	0.9203
0.60	0.9411
0.50	0.9586
0.40	0.9736
0.30	0.9851
0.20	0.9934
0.10	0.99983
0.010	0.9999

x	$\frac{\sin x}{x}$
-1	0.8417
-0.90	0.8704
-0.880	0.8967
-0.70	0.9203
-0.60	0.9411
-0.50	0.9586
-0.40	0.9736
-0.30	0.9851
-0.20	0.9934
-0.10	0.99983
-0.01	0.9999

(1) القيمة النهائية للدالة.

نجد أن قيمة الدالة تقترب من الواحد الصحيح فى حالتى الاقتراب من يمين ويسار النقطة 0 = وهذا واضح فى نهايتى الجدولين السابقين.

فعندما تقترب قيمة الدالة من الواحد الصحيح من ناحية اليمين أى من على يمين 0 = x تكتب بالصورة:

$$\lim_{x \to 0^{+}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حيث وضعت إشارة + فوق 0 على الصورة 0^{+} لتعنى أن الاقتراب من الصفر من ناحية اليمين.

وعندما تقترب قيمة الدالة أيضا من الواحد الصحيح من ناحية اليسار أى من على يسار النقطة 0 = تكتب بالصورة:

$$\lim_{x \to 0^{-}} \frac{\sin x}{x} = 1$$

حيث وضعت إشارة – فوق 0 على الصورة 0^{-} لتعنى أن الاقتراب من الصفر من ناحية اليسار.

وعندما تتساوى قيمة النهايتين أى أن:

قيمة النهاية من ناحية يمين النقطة = قيمة النهاية من ناحية يسار النقطة تكتب النهاية بدون إشارة لنقطة الاقتراب هكذا:-

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

وفى هذه الحالة يكون:

$$\lim_{x \to 0^{+}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0^{-}} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$$

نظريات فى النهايات:

نقدم بعض النظريات الهامة للطالب فى هذه المرحلة بدون برهان لها مع أمثلة توضحية مختلفة تطبيقا على النظريات تساعد الطالب على الاستيعاب والفهم.

نظرية (1) :

إذا كان m , a , b جزء من الأعداد الحقيقية فإن:

$$\lim_{x \to a} mx + b = ma + b$$

حالات خاصة:

I $\quad \lim_{x \to a} x = a \quad , \qquad m = a \ , \ b = 0$

II $\quad \lim_{x \to a} x = a \quad , \qquad m = a$

مثال 1 :

أوجد:

$$\lim_{x \to 2} 2x + 5$$

الحـــل:

$$\lim_{x \to 2} 2x + 5 = 2(2) + 5$$

$$= 9$$

مثال 2 :

أوجد :

$$\lim_{x \to 2} x \quad , \quad \lim_{x \to 2} 5$$

الحـــــل :

$$\lim_{x \to 2} x = 2$$

$$\lim_{x \to 2} 5 = 2$$

نظريـــة 2 :

إذا كانت كل من النهايتين $\lim_{x \to a} G(x) \quad , \quad \lim_{x \to a} F(x)$

موجودة فإن :-

$$\text{I - } \lim_{x \to a} [F(x) \pm G(x)] = \left[\lim_{x \to a} F(x)\right] \pm \left[\lim_{x \to a} G(x)\right]$$

$$\text{II - } \lim_{x \to a} K.\, F(x) = K \lim_{x \to a} F(x)$$

حيث K ثابت

$$\text{II - } \lim_{x \to a} F(x) \,.\, G(x) = \left[\lim_{x \to a} F(x)\right] \left[\lim_{x \to a} G(x)\right]$$

$$\text{IV- } \lim_{x \to a} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{\lim_{x \to a} F(x)}{\lim_{x \to a} G(x)} \quad , \quad \lim_{x \to a} G(x) \neq 0$$

نظريـــة 3 :

إذا كانت النهاية $\lim_{x \to a} G(x)$ موجودة , n عدد صحيح موجب فإن :

$$\lim_{x\to a} [G(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} G(x)\right]^n$$

مثـــــال 3 :

أوجــــد :-

$$\lim_{x\to 3} (x^2 + 2x + 1)$$

الحـــــل :

$$\lim_{x\to 3} (x^2 + 2x + 1) = \left[\lim_{x\to 3} x\right]^2 + \left[2\lim_{x\to 3} x\right] + \left[\lim_{x\to 3} 1\right]$$

$$= [3]^2 + [2(3)] + [1]$$

$$= 9 + 6 + 1$$

$$= 16$$

مثـــــال 4 :

أوجــد: -

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2 + 3x)(x+1)^2}{(x^2 - 5)}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^2 + 3x)(x+1)^2}{(x^2 - 5)} = \frac{\left[\lim_{x\to 1} (x^2 + 3x)\right]\left[\lim_{x\to 1} (x+1)^2\right]}{\left[\lim_{x\to 1} (x^2 - 5)\right]}$$

$$= \frac{\left[\left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 + 3\left(\lim_{x\to 1} x\right)\right]\left[\left(\lim_{x\to 1} x\right) + \left(\lim_{x\to 1} 1\right)\right]^2}{\left[\left(\lim_{x\to 1} x\right) - \left(\lim_{x\to 1} 5\right)\right]}$$

$$= \frac{[1 + 3(1)]\,[1 + 1]}{[1 - 5]}$$

$$= \frac{[4]\,.\,[2]}{[-4]} = -2$$

نظرية 4 :

إذا كان a عددا حقيقيا ، r عددا نسبيا (قياسيا) بحيث أن a^r معرف كعدد حقيقى فإن:

$$\lim_{x\to a} x^r = a^r$$

مثـــال 5 :

أوجـــد :-

$$\lim_{x\to 3} x^{0.2} = 3^{0.2}$$

نظريـــة 5 :

إذا كان n , m عددان صحيحان موجبين فإن :-

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x^m - a^m} = \frac{n}{m}(a)^{n-m}$$

مثـــال 6 :

أوجـــد:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2}$$

الحل:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 2^4}{x - 2} = \frac{4}{1}(2)^{4-1}$$

$$= 4\,(2)^3$$
$$= 32$$

نظرية 6 :

إذا كـان a عـدد حـقـيـقـي و r عـدداً نـسـبـيـاً وكـانـت G(x) دالـة وأن $\lim_{x \to a} G(x)$ موجودة وأن $\left[\lim G(x)\right]^2$ معرف كعدد حقيقي فإن:

$$\lim_{x \to a} G^r(x) = \left[\lim_{x \to a} G(x)\right]^r$$

مثـــــال 7 :

أوجـــــــد :

$$\lim_{y \to 1} \sqrt{5 - 3y - y^2}$$

الحـــــل :

$$\lim_{y \to 1} \sqrt{5 - 3y - y^2} = \left[\lim_{y \to 1} 5 - 3 \lim_{y \to 1} y - \left(\lim_{y \to 1} y\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[5 \quad - 3 \quad - 1\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= 1$$

أمثلة منوعة :

مثال 1 :

أوجـد :

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1}$$

الحـــل :

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(3x-2)}{(x+1)}$$

$$= \lim_{x\to -1} (3x - 2)$$

$$= (3(-1) - 2$$

$$= -5$$

مثـــال 2 :

أوجـــد :

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5}$$

الحـــل :

$$\lim_{x\to 5} \frac{x^3 - 125}{x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{x^3 - x^3}{x - 5}$$

$$= \frac{3}{1} (5)^{3-1}$$

$$= 75$$

مثـــال 3 :

أوجـــد :

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3^3}{x^2 - 3^2} = \frac{3}{2}(3)^{2-1}$$

$$= \frac{9}{2}$$

مثـــال 4 :

أوجـــد:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1}$$

الحـــل :

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1^5}{x^3 - 1^3} =$$

$$= \frac{5}{4}(-3)^{5-4}$$

$$= -\frac{15}{4}$$

مثـــال 6 :

أوجـــد :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x}$$

الحـــــل :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2 - 9}{x} = \lim_{y \to 0} \frac{x^2 + 6x + 9 - 9}{x}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{x^2 + 6x}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x + 6$$

$$= 6$$

حل آخـــــر :

يمكن تطبيق نظرية 5 وذلك بإضافة 3 + , 3- فى المقام كالآتى:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2 - 3^2}{x + 3 - 3}$$

أيضا $x \to 0$

بإضافة 3 + فى الطرفين تصبح كالآتى:

$$x + 3 \to 3$$

وبذلك توضع الدالة بنفس صيغة النظرية وتصبح كالآتى:

$$\lim_{x+3 \to 3} \frac{(x+3)^2 - 3^2}{(x+3) - 3} = \frac{2}{1}(3)^{2-1}$$

$$= 6$$

مثـــال 7 :

أوجــــد :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$$

الحـــل :

بضرب الدالة فى مرافق البسط لتصبح:-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} \cdot \left(\frac{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+3)-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{3}} \quad = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

وعلى الطالب حل المثال بإستخدام نظرية 5 بنفس طريقة حل المثال السابق.

مثـــال 8 :

أوجــــد :

$$\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}$$

الحل:

بضرب الدالة فى مرافق البسط لتصبح :

$$\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} \cdot \left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{5}}{\sqrt{x} + \sqrt{5}}\right)$$

$$= \lim_{x \to 5} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{5}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

مثـــال 9 :

أوجـــد :

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x - 2}$$

الحـــل :

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x - 2} = \lim_{x-2 \to 0} \frac{\sin(x-2)}{x - 2}$$

$$=1$$

مثـــــال 10 :

أوجـــد :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3 \sin 3x}{3x}$$

$$= 3 \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{3x}$$

$$= 3(1)$$

مثـــال 11 :

أوجـــد :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}$$

الحـــل :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x}$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{\lim\limits_{y \to 0} \cos x}$$

$$= (1) \cdot \frac{1}{(1)}$$

$$= 1$$

تمارين (31)

1- $\lim_{x \to -2} 7$

2- $\lim_{x \to -2} 3x$

3- $\lim_{x \to \infty} 7$

4- $\lim_{y \to 2} 2y$

5- $\lim_{x \to 5} \sqrt{x^3 - 2x - 1}$

6- $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x}{x + 1}$

7- $\lim_{y \to 2} \dfrac{(y-1)(y-2)}{y + 1}$

8- $\lim_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

9- $\lim_{z \to 4} \dfrac{z^2 - 3z - 4}{z - 4}$

10- $\lim_{x \to -5} \dfrac{1/x + 1}{x + 5}$

11- $\lim_{x \to 0} \dfrac{5x^3 + 8x^2}{3x^4 - 16x^2}$

12- $\lim_{t \to -2} \dfrac{t^3 + 8}{t + 2}$

13- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + x - 6}$

14- $\lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t^3 + t^2 - 5t + 3}{t^3 - 3t + 2}$

15- $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{|x|}$

16- $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$

17- $\lim\limits_{y \to -3} \dfrac{y + 3}{y^2 - 9}$

18 - $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 3x - 4}{(x-1)(x+8)^2}$

19 - $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x - 3} - 2}{x - 7}$

20 - $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{4}} \dfrac{(2x + 3)^2 - 4x^2}{4x^2 + 3x}$

21 - $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4 - 16}{x - 2}$

22 - $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x^7 - 128}$

23- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\tan x}$

24 - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 5x}{7\,x}$

25 - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin x}$

26 - $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)^2}{x^2}$

27 - $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt{\dfrac{x^2 + 2\,x + 3}{x^2 - 3\,x + 4}}$

28 - $\lim\limits_{x \to 1} (3\,x + \dfrac{2}{3}) \sqrt{x + 8}$

29 - $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}}$

30 - $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{7}}{x - 3}$

31 - $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 16}$

32 - $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{(3x - 2)^2 - 4}{5\,x}$

33 - $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 - 16}{x^3 + 64}$

34 - $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{1/x - 1/4}{4 - x}$

35 - $\lim\limits_{x \to -\frac{3}{4}} \dfrac{(2x + 3)^2 - 4x^2}{4x^2 + 3x}$

36 - $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{2x + 5} - \sqrt{x + 5}}{x + 1}$

37 - $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{3x - 2} - \sqrt{x + 2}}$

38 - $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x + 1} - 2}{\sqrt{6 + x} - 3}$

39 - $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{3 - x} - \sqrt{x + 1}}{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{3x - 2}}$

40 - $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{x - 1}$

41 - $\lim\limits_{e \to 0} \dfrac{(3 + e)^5 - 243}{5e}$

42 - $\lim\limits_{e \to 0} \dfrac{(2+3e)^8 - 256}{4e}$

اللانهايـــــــــة :

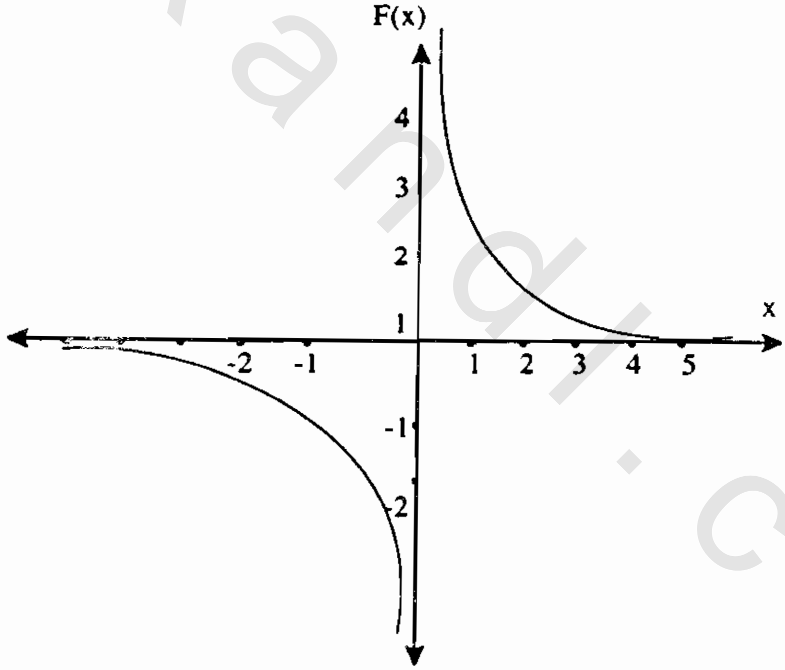
نعلم أن مجال الدالة $F(x) = \frac{1}{x}$

هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 0$

ولعمل الرسم البيانى لها يتم عمل الجدول الآتى :-

x	1	22	3	4	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{61}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10^6}$
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	2	4	8	16	32	64	100	1000	10^6

واضح أن الدالة ← ∞ عندما x ← 0 ، كما أن الداله فردية (تستخدم نقطة الأصل فى رسمها فى الربع الثالث (شكل 87).



شكل 87

ويتضح من الرسم البيانى الآتى:-

(أ) تقترب $\frac{1}{x}$ من الصفر عندما تقترب x من اللانهاية الموجبه أو اللانهاية السالبة (∞ + أو ∞-)

(ب) تقترب $\frac{1}{x}$ من ∞ + عندما تقترب x من الصفر عبر القيم الموجبة (الاقتراب من الصفر من جهة اليمين)

(جـ) تقترب $\frac{1}{x}$ من ∞- عندما تقترب x من الصفر عبر القيم السالبة (الاقتراب من الصفر من جهة اليسار).

ملحوظــــــة :

يستعمل أحيانا فى الرياضيات المتقدمة منظومة جديدة تتكون من الأعداد الحقيقية والعنصرين الاضافيين ∞ + , ∞- وتسمى هذه المنظومة منظومة الأعداد الحقيقية الموسعة وسوف يستبعد فى هذا الكتاب إستعمال منظومة الأعداد الحقيقية الموسعة كما نتجنب القسمة على الصفر للحفاظ على القوانين العادية للحساب والجبر.

تعريـــــــف:

إذا كانت الدالة F(x) معرفة للقيم الكبيرة لـ x فيقال أن F(x) تقترب من العدد الحقيقى L كنهاية لها عندما تقترب x من اللانهاية وكتب بهذه الصورة:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = L$$

علما بأن النظريات المستخدمة فى اللانهاية حول نهايات المجموع والفرق

والنسبة مماثلة للنظريات المقابلة للنهايات عندما $x \to a$.

نظريــــة 1 :

إذا كان:

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = L_1 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} G(x) = L_2$$

حيث L_1 , L_2 عددان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x\to\infty} (F(x) \pm G(x)) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) . G(x) = L_1 L_2$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{L_1}{L_2} , \quad L_2 \neq 0$$

نظريــــة 2 :

إذا كان :-

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$$

، $G(x)$ محدودة عندما $x \to \infty$ فإن :

$$\lim_{x\to\infty} (F(x) = G(x)) = \infty$$

نــظرية 3 :

إذا كان :

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 0$$

، $G(x)$ محدودة عندما $x \to \infty$ فإن :

$$\lim_{x\to\infty} (F(x) = G(x)) = 0$$

وسوف نقتصر فى دراستنا على الأمثلة التوضيحية الهامة فقط التى تهم الطالب فى هذه المرحلة.

مثال 1 :

أوجد قيمـــة :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x}$$

الحـــل :

x	1	10	100	1000	10^4	10^5	10^6
$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10^4}$	$\frac{1}{10^5}$	$\frac{1}{10^6}$

نلاحظ من الجدول أنه كلما إقتربت x من اللانهاية تقترب $\frac{1}{x}$ من الصفر.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

يتم عمل جدول فيه $x \to -\infty$

x	-1	-10	-100	-1000	-10^4	-10^5	-10^6
$\frac{1}{x}$	-1	$-\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{100}$	$-\frac{1}{1000}$	-10^{-4}	-10^{-5}	-10^{-6}

نلاحظ من الجدول أنه كلما اقتربت x من سالب مالانهاية تقترب $\frac{1}{x}$ من الصفر أى أن :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

مثال 2 :

أوجـد قيمة :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n}$$

الحــــل :

$$\left(\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} \right)^n = 0 = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n}$$

مثـــال 3:

أوجد قيم النهايات الآتية:-

(a) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x + 5}{6x - 8}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 - x}{6x^3 - 8}$

(c) $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt{\dfrac{3x+5}{6x-8}}$

الحـــل :

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x+5}{6x-8}$

بقسمة البسط والمقام على x

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x+5}{6x-8} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x+5\left(\frac{1}{x}\right)}{6x-8\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to \infty} 3+5 \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x \to \infty} 6-8 \lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \frac{3+5(0)}{6-8(0)} = \frac{1}{2}$$

المقدار $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4x}+x}{\sqrt{x^2+4x}+x} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2+4x-x^2}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x\left(\sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{x}\right)} + 1\right)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

ملحوظـــــة :

تم الضرب فى المرافق كأسلوب جبرى للحل عندما تكون قيمة النهاية ∞ - ∞

مثـــــال 4 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + 4x} - x$$

الحـــــل :

يتم ضرب المقدار فى المرافق.

$$\therefore \text{المقدار} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4x} + x}{\sqrt{x^2 + 4x} + x} \cdot \left(\sqrt{x^2 + 4x} - x\right)$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4x}{x\sqrt{1 + 4\left(\frac{1}{x}\right)} + 1}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

ملحوظـــــة:

تم الضرب فى المرافق كأسلوب جبرى للحل عندما تكون قيمة النهاية تساوى∞ - ∞

مثـــــال 5 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$$

الحـــــل:

بالتعويض المباشر تكون النتيجة ∞ - ∞ وهى كمية غير معنية باستخدام تحليل

فرق بين معكبين

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$\therefore A - B = (\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B})(A^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{A}\ \sqrt[3]{B} + B^{\frac{2}{3}})$$

مع التعويض عن :

$A = x + 1$

$B = x$

$$\therefore \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^{\frac{2}{3}}\ \sqrt[3]{x+1}\ \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \frac{x + 1 - x}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x+1}\ \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(x+1)^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{x+1}\ \sqrt[3]{x} + x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 0$$

(b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x^2 - x}{6x^3 - 8}$

بالقسمة على x^2 لكل من البسط والمقام

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - x}{6x^3 - 8} = \lim_{x\to\infty} \frac{4(\frac{1}{x}) - (\frac{1}{x^2})}{6 - 8(\frac{1}{x^3})}$$

$$= \frac{4 \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x}) - (\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x})^2}{\lim\limits_{x\to\infty} 6 - 8 (\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x})^3}$$

$$= \frac{4(0) - 0}{6 - 0}$$

$$= 0$$

(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{\dfrac{3x + 5}{6x - 8}}$

بإدخال النهاية داخل الجذر التكعيبى وقسمة البسط والمقام على x

$$\text{المقدار} = \sqrt[3]{\frac{3 + 5 \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{x})}{6 - 8 \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3 + 5(0)}{6 - 8(0)}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{3 + 5(0)}{6 - 8(0)}}$$

قاعدة عامـــــــة :

في النهايات التى يقترب فيها المتغير من اللانهاية يتم قسمة البسط والمقام على أكبر قوة للمتغير (أكبر أس للمتغير).

مثـــــال 6 :

أوجد قيمة :

$$\lim_{x \to \infty} (x + \sin x)$$

الحـــــل :

$$\lim_{x \to \infty} x = \infty$$

$$\sin x \geq -1$$

$$\lim_{x \to \infty} \sin x$$ كمية غير محددة

$$\lim_{x \to \infty} (x + \sin x) = \infty$$

مثـــــال 7 : أوجد قيمة :-

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x}$$

الحـــــل :

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

تمارين (32)

أوجد النهايات الآتية :-

1- $\lim\limits_{x \to \infty} 7$

2- $\lim\limits_{x \to \infty} (-3)$

3- $\lim\limits_{x \to \infty} (-2\,h)$

4- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{n + n^2}{n}$

5- $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{(t+1)(2t+1)}{t^2}$

6- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+1)(2x+1)(3x+1)}{x^3}$

7- $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2}$

8- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 4}{x^2 + x + 1}$

9- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 5 + 14}{17 + 7x + 4x^2}$

10- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 - 3x^2 + 4x + 5}{5x^3 + 4x - 8}$

11- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{(x+2)(x-1)x+1)}{(1-2x)(1+x)}$

12- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{7(2)^x + 5(3)^x}{4(3)^x + 2^x}$

13- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x^2}[1 + 4 + 7 + \dots \;\; + (3x - 2)]$

14- $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5 + 9 + 13 + \dots \;\; + (4x - 78)}{1 + 3 + 5 + \dots \;\; + (4x - 3)}$

15 إذا كانت :

$$F(x) = \begin{cases} x - 1 & , \; x \leq 3 \\ 3x - 7 & , \; x > 3 \end{cases}$$

أوجـــــد :

(a) $\lim\limits_{x \to 3^-} F(x)$

(b) $\lim\limits_{x \to 3^+} F(x)$

(c) $\lim\limits_{x \to 3} F(x)$

الدوال المستمرة :

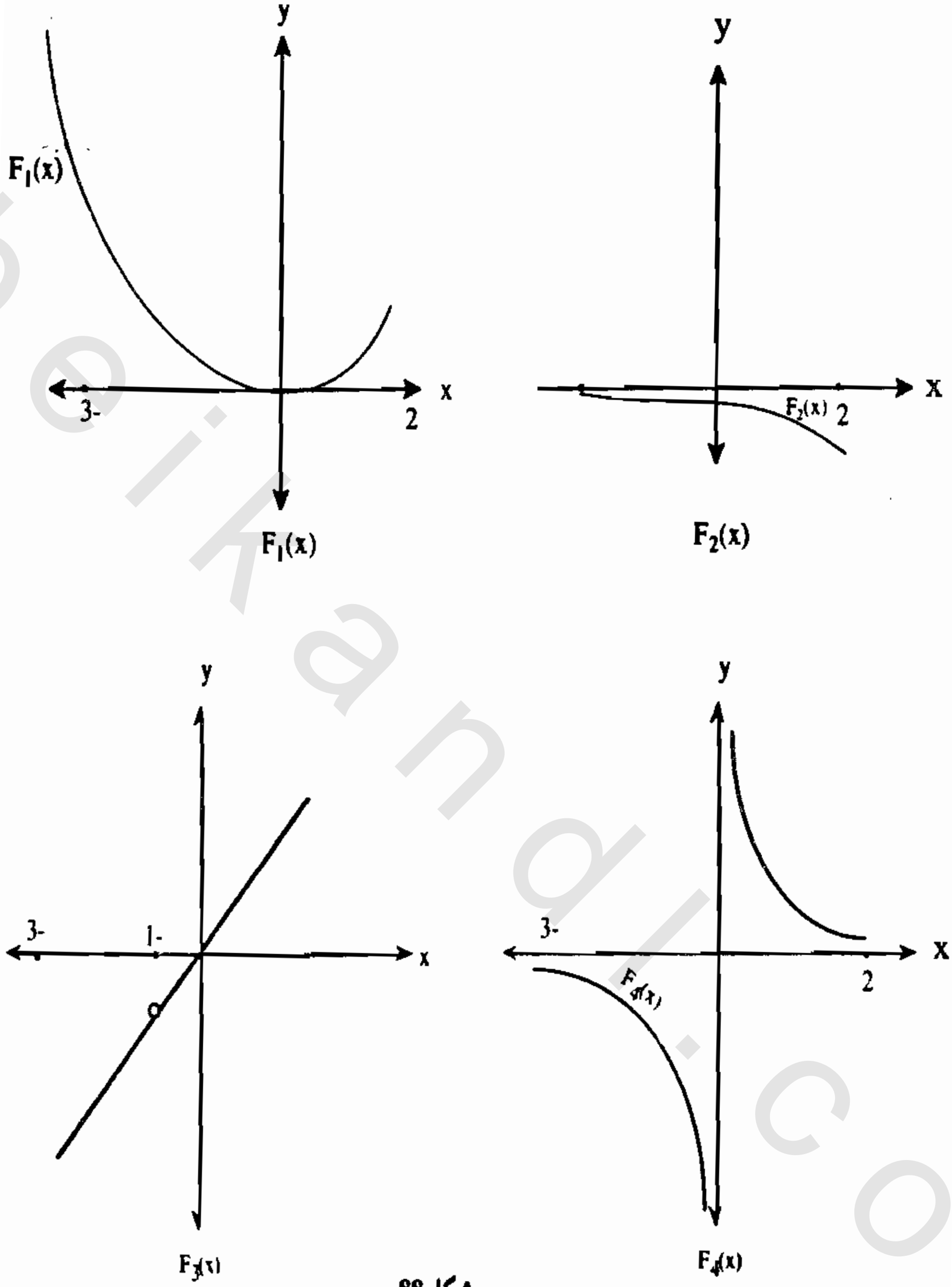
إن سلوك الاستمرار فى الدالة له صلة ببيانها ولذلك نعتبر الآتى للتوضيح والذى يوضحه شكل 88 .

$$F_1(x) = \left\{ (x,y) \; : y = x^2 , x \in [-3 , 2] \right\}$$

$$F_2(x) = \left\{ (x,y) \; : y = \frac{1}{x - 3} , x \in [-3 , 2] \right\}$$

$$F_3(x) = \left| (x,y) \; : y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \; x \in [-3 , 2 \\ -1 & , x = -1 \end{cases} \right|$$

$$F_4(x) = \left| (x,y) \; : y = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \; x \in [-3 , 2 - \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \right|$$



شكل 88

من الملاحظ أن الدوال الأربعة معرفة على الفترة [2 , 3-] كما يمكن رسم منحنى الدالتين $F_1(x)$, $F_2(x)$ دون الحاجة لرفع القلم من الصفحة أى بحركة متصلة للقلم ولذلك تسمى هذه الدوال متصلة.

أما الدالة رقم (3) $F_3(x)$ تعبر عن خط مستقيم به، ما يسمى (ثغرة) عند $x = -1$ حيث قيمة الدالة عندها يساوى -1 . وبذلك لا يمكن أن يتحرك القلم حركة متصلة عند $x = -1$ فى بيان الدالة.

ولكن إذا عرفنا دالة R كالآتى:

$$R(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & , \quad x \neq 1 \\ -2 & , \quad x = 1 \end{bmatrix}$$

لجميع قيم x فى الفترة [2 ,3-] تعبر عن دالة متصلة يمثلها خط مستقيم متصل بدون إنقطاع فى الفترة المذكورة.

أما الدالة رقم (4) $F_4(x)$ لا يمكن رسمها بحركة متصلة بالقلم على ورقة الرسم لوجود ما يسمى (قفزة أو وثبة) عنده $x = o$.

وعلى ذلك تكون $F_1(x)$, $F_2(x)$ مثالين للدوال المستمرة.

، $F_3(x)$, $F_4(x)$ يمثلا دوال غير مستمرة.

وبدراسة الدوال السابقة نلاحظ على الدوال الغير مستمرة ما يلي:-

عند النقطة $x = c$ التى فى نطاق الدالة F وتكون عندها الدالة F غير مستمرة إما أن تكون :-

$\lim\limits_{x \to c} F(x)$ غير معرفة I

أو

II $\lim\limits_{x \to c} F(x)$ غير معرفة

فمثلا $F_3(x)$ عند $x = -1$ نجد أن :-

$$\lim_{x \to -1} F(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1} x - 1 = -2$$

$$, \ F_3(-1) = -1$$

أى أن :

$$\lim_{x \to -1} F_3(x) \neq F_3(-1)$$

بمعنى أن قيمة النهاية لا تساوى قيمة الدالة عند $x = -1$ وكذلك $F_4(x)$ عند $x = 0$ نجد أن

$$\lim_{x \to 0^+} F_4(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

,

$$\lim_{x \to 0^-} F_4(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

أي أن :

$$\lim_{x \to 0^-} F_4(x) = \neq \lim_{x \to 0^+} F_4(x)$$

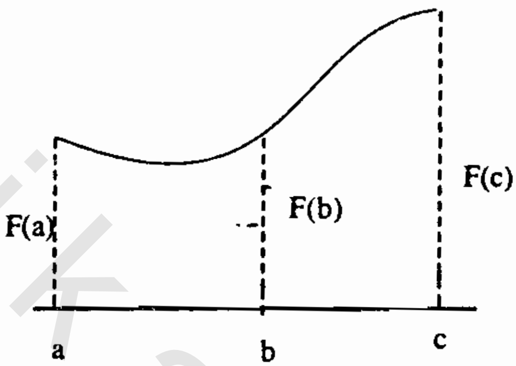
بمعنى أن قيمة النهاية غير معرفة عند $x = 0$.

أما بالنسبة للدوال المستمرة عند أى نقطة c فى نطاقها أن :-

$$\lim_{x \to c} F(x) = F(c)$$

وبوجه عام فإن استمرارية الدالة $F(x)$ عند c داخل مجال (نطاق) F يعنى استمرارها من الجهتين.

أما إذا كانت c هى إحدى نهايتى النطاق فإن استمرار الدالة عندها يعنى استمرارها من جهة واحدة. شكل 89.



شكل 89

$$\lim_{x \to c} F(x) = F(c)$$

$$\lim_{x \to a^{+}} F(x) = F(a)$$

$$\lim_{x \to a^{-}} F(x) = F(a)$$

أى أن الدالة مستمرة عند كل من b , a وجميع النقط الواقعة بينهما.

مثـــال 1 :

إبحث إستمرار الدوال أو عدمه عند النقط المبينة:

(a) $F(x) = x^3 + 5x + 2$ at $x =$ [illegible]

(b) $F(x) = \sqrt{x + 1}$ at $x = 3$, $x = -1$

(c) $F(x) = \sqrt[3]{4 - x}$ at $x = 5$

(d) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{x-3} & \text{at } x \neq 3 \\ 4 & \text{at } x = 3 \end{cases}$

at $x = 3$

(e) $F(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 + 5x - 7}{3x - 3} & \text{at } x \neq 1 \\ 4 & \text{at } x = 1 \end{cases}$

at $x = 1$

الحـــــل :

(a) $F(1) = 1 + 5 + 2 = 8$

$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} x^3 + 5x + 2 = 8$

$\therefore \lim_{x \to 1} F(x) = F(1)$

∴ الدالة F(x) متصلة (مستمرة) عند 1 =

(b) $F(x) = \sqrt{x+1}$

D_F: $x + 1 \geq 0$

$x \geq -1$

$x \in [-1, \infty)$

I- at $x = 3$:

$F(3) = \sqrt{3+1} = 2$

$$\lim_{x \to 3} F(x) = \lim_{x \to 3} \sqrt{x+1} = 2$$

∴ الدالة F(x) (مستمرة) عند x = 3

II- at x -1 :

$$F(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$$

$$\lim_{x \to -1} F(x) = \lim_{x \to -1} \sqrt{x+1} = 0$$

∴ الدالة F(x) متصلة (مستمرة) عند 1- = من جهة اليمين فقط وهى

غير معرفة من جهة اليسار.

(c) $F(x) = \sqrt[3]{4-x}$

$$F(5) = \sqrt[3]{4-5} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\lim_{x \to 5} F(x) = \lim_{x \to 5} \sqrt[3]{-1} = -1$$

وحيث أن $\lim_{x \to 3} F(x) = \neq F(3)$

∴ الدالة غير مستمرة عند x = 3

(e) $$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(2x+7)(x-1)}{3(x-1)} = 3$$

$$F(1) = \frac{(2+7)(1)}{3} = 3$$

∴ الدالة مستمرة عند x = 1

مثال 2 :

أوجد قيمة k التى تجعل الدالة F(x) المعرفة بالعلاقة :

$$F(x) \begin{cases} x^2 & , x < 2 \\ k\,x & , x \geq 2 \end{cases}$$

مستمرة عند x = 2.

$$\lim_{x \to 2} F(x) = \lim_{x \to 2^+} k\,x = 2\,k$$

$$\lim_{x \to 2^-} F(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4$$

ولكى تكون الدالة مستمرة عند x = 2 يكون :

$$\lim_{x \to 2^+} F(x) = \lim_{x \to 2^+} F(x)$$

$$\therefore 4 = 2\,k$$

$$k = 2$$

مثـــال 3 :

أزل عدم الاستمرار إن أمكن للدالة المعرفة كالآتى:-

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} & , x \neq 1 , x \neq 2 \\ 1 & x = 1 \\ -2 & x = -2 \end{cases}$$

الحـــل :

نختبر استمرار الداله عند x = 1

$F(1) = 1$

$$\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} = 1$$

وحيث أن نهاية الدالة تساوى قيمة الدالة عند $x = 1$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $x = 1$

نختبر استمرار الدالة عند $x = -2$

$F(-2) = -2$

$$\lim_{x \to -2} F(x) = \lim_{x \to -2} x^2 = 4$$

أي أن الدالة غير مستمرة عند $-2 =$

ويمكن إعادة التعريف لكى تكون الدالة مستمرة عند تلك النقطة فيجب أن يكون :-

$$F(-2) = \lim_{x \to -1} F(x) = 4$$

بالتعريف الآتى:-

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 (x-1)(x+2)}{(x-1)(x+2)} & , x \neq 1 , x \neq -2 \\ 1 & (\text{عند } x = 1) \\ 4 & (\text{عند } x = -2) \end{cases}$$

تمارين (33)

١- ابحث إتصال الداله F عند النقطة المعطاه

$$a)\quad F(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2 - 9}{2x - 3} & \rightarrow \text{at } x \neq \dfrac{3}{2} \\ 6 & \rightarrow \text{at } x = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

عند $x = \dfrac{3}{2}$

$$a)\quad F(x) = \begin{cases} 3x + 2 & \rightarrow \text{at } x \leq 1 \\ 5x & \rightarrow \text{at } x > 1 \end{cases}$$

عند $x = 1$

$$c)\quad F(x) = \begin{cases} x^2 & \rightarrow \text{at } x \leq 0 \\ x & \rightarrow \text{at } x > 1 \end{cases}$$

عند $x = 0$

2 - أوجد قيمة h التى تجعل الداله F(x) مستمرة عند $x = 1$

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} & \rightarrow \text{at } x \neq 1 \\ h & \rightarrow \text{at } x = 1 \end{cases}$$

3 - إذا كانت الداله F(x) معرفة كالآتى:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{|x-5|} & \rightarrow \text{at } x \neq 5 \\ 3 & \rightarrow \text{at } = 5 \end{cases}$$

فأبحث استمرارية الداله F(x) عند النقطة x = 5

4- إذا كانت الداله (x) معرفة كالآتى:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x^3-1} & \rightarrow \text{at } x \neq 1 \\ 2k-1 & \rightarrow \text{at } x = 1 \end{cases}$$

أوجد قيمة k التى تجعل F(x) متصلة عند x = 1

5- أوجد قيمة h التى تجعل F(x) دالة متصلة عند x = 1

$$F(x) = \begin{cases} x^2 + h & \rightarrow \text{at } x \neq 1 \\ 3 & \rightarrow \text{at } x = 1 \end{cases}$$

6 - إذا كانت الداله F(x) معرفة كالآتى:

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{5x - 3\sin x}{2x} & \rightarrow \text{at } x \neq o \\ 3k-2 & \rightarrow \text{at } x = o \end{cases}$$

ما هى قيمة k التى تجعل الداله F(x) متصلة عند $x = o$

7 - إذا كانت الداله F(x) معرفة كالآتى:

$$F(x) = \begin{cases} 2kx & \rightarrow \text{at } x \geq 3 \\ x^2 + 1 & \rightarrow \text{at } x < 3 \end{cases}$$

أوجد قيمة k التى تجعل $\lim\limits_{x \to 3} F(x)$ موجودة

8 - إدرس استمرار الدوال الأتيه خلال مجال كل منها :

(a) $$F(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \rightarrow x \neq 1 \\ 3 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} & \rightarrow x \neq 1 \\ 3 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

(c) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} & \rightarrow x \neq -3 \\ 3 & \rightarrow x = -3 \end{cases}$$

9 - أزل عدم الاتصال فى الدوال الآتية:-

(a) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 3x + 2}{x + 1} & \rightarrow x \neq -1 \\ 2 & \rightarrow x = -1 \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{(x+1)(x-1)} & \rightarrow x \neq 1 , x \neq -1 \\ 1 & \rightarrow x = -1 \\ 3 & \rightarrow x = 1 \end{cases}$$

10 - أوجد قيمة h التى تجعل الداله F(x) معرفة :-

(a) $$F(x) = \begin{cases} h^2 + 1 & \rightarrow x \leq 1 \\ 2 & \rightarrow x > 1 \end{cases}$$

(b) $$F(x) = \begin{cases} h\,x & \rightarrow x \leq 1 \\ 6 & \rightarrow x > 1 \end{cases}$$

الباب الرابع

مبادئ الأحصاء

مبادئ الإحصاء

يختص علم الإحصاء بجمع وتصنيف وشرح وتلخيص البيانات حول الظواهر المختلفة المحيطه بنا وذلك لتوضيح واعطاء فكرة عامة أو استنتاج واتخاذ قرارات معينة فى حالات يكون فيها القرار غير واضح والاستنتاج غير صريح، أي أنه باستخدام الطرق الاحصائية نستطيع فهم وتوضيح أكثر ما يمكن من حقائق حول بيانات الظواهر المختلفة.

والطرق الاحصائية بفروعها المختلفة لها تطبيقات عديدة فى جميع فروع العلوم الطبيعية والانسانية فمثلا باستخدام الطرق الاحصائية يمكن بدراسة جزء من المجتمع أن نعمم النتائج على المجتمع ككل، كما يمكن دراسة مدى ارتباط تأثير وتأثير الظواهر بعضها ببعض والتبنؤ بسلوك بعض الظواهر مستقبلا اعتمادا على سلوكها فى الماضى.

كذلك يمكن باستخدام الطرق الاحصائية توضيح عما إذا كانت البيانات حول ظاهرة ما تدعم صحة بعض الفروض أو العكس كما أن نتائج المتعددات العامة تستخدم فى التخطيط للسياسة العامه فى جميع المجالات، والطرق الاحصائية أسسها واحدة مهما اختلفت أوجه استخداماتها فى العلوم المختلفة مع مراعاة أنه للقيام بأى دراسة إحصائية يجب الاهتمام بالنقاط التالية:

1 - تحديد هدف الدراسة.

2 - تصميم الدراسة.

3 - **جمع المعلومات المطلوبة.**

4 - **تحليل النتائج.**

وقد تطور العلم وأصبح له فروع عديدة يمكن تقسيمها إلى:-

1 - الاحصاء الوصفي:

الذى يختص بوصف وعرض وتلخيص البيانات.

2 - الاحصاء الاستنتاجي:

ويختص باستنتاج واتخاذ القرار وتعميم النتائج مع حساب درجة الثقة المصاحبة لهذه القرارات والاستنتاجات ويهتم هذا المقرر بالنوع الأول.

أولا: الجدول التكراري :

هو جدول يوضح البيانات على هيئة فترات ذات فترات متساوية ويقابلها تكرارات تمثل عدد البيانات لكل فئة.

مثال :

إذا كان انتاج 60 مصنعاً من إنتاج معين كالآتى:

89	29	68	91	72	31	25	62	57	46	21	95	87
73	77	62	58	81	57	54	72	81	83	73	62	66
36	77	62	58	81	57	54	72	81	83	73	62	66
36	29	17	63	52	97	87	67	96	88	83	73	12
42	33	21	54	36	81	65	57	73	92	62	63	71
					51	62	56	23	49	46	89	58

والمطلوب توضيح المعالم الأساسية لهذه البيانات عن طريق الجدول التكرارى.

العمـــل :

لتكوين جدول تكرارى تتبع الخطوات التالية:

1 - نحدد المدى الذى تنتشر فيه هذه البيانات.

المدى = أكبر بيان - أصغر بيان = 97 - 12 = 85

2 - نقسم هذا المدى إلى فترات متساويه الطول بحيث يكون عددها مناسبا فإذا حددنا طول الفترة مثلا (10) سيكون لدينا 9 فترات

$$(\text{عدد الفترت} \cong \frac{\text{المدى}}{\text{طول الفتره}} \cong \frac{85}{10} \cong 9)$$

3 - يكون لكل فترة حد أدنى وحد أعلى بحيث يكون الحد الأدنى للفترة الأولى مساويا أو أقل من الحد الأدنى للبيانات (أى أصغر قيمة موجودة) كذلك الحد الأعلى لآخر فترة يكون مساويا أو أكبر من الحد الأعلى للبيانات (أكبر قيمة موجودة) وذلك حتى نضمن عدم وجود فترات زائدة ليس لها تكرارات.

4 - نضع الجدول على صورة أفقيه أو رأسيه ونحصر القيم لكل فترة بوضع علامة (|) فى خانة علامات الحصر المقابلة للفترة المعنية فمثلا عدد البيانات المحصوره بين 10 - 20 هو 2 نتكون بالحصر || وعدد البيانات المحصورة بين 30 - 20 هو 5 فتكون بالحصر |||| وتكون الجدول التكرارى بهذا الشكل.

إنتاج 60 مصنعا فى سلعة معينة

الفترة	20-10	30 -20	40-30	50-40	60-50	70-60	80-70	90-80	100-90	المجموع
علامات الحصر	||	卌	卌	||||	卌 卌	卌 卌 |	卌 ||||	卌 ||||	卌	
التكرار	2	5	5	4	10	11	9	9	5	60

ملحوظـــــة :

الفـترة 10 - 20 تعنى جـميع الأعداد التى هى مسـاويه لـ 10 وأقل من 20 أى العدد 20 يكون من ضمن الفترة التاليه وهكذا باقى الفترات بالمثل.

وبالرغم أنه لا تـوجـد طريقـة وحـيـدة لوضـع الجـداول التكرارية إلا أنه هناك بعض النقاط الأساسية التى يجب مراعاتها عند تكوين الجداول التكراريه وهى:

1 - يجـب أن يكـون عـدد الـفـتـرات مناسـبـا من 5 إلى 25 حـسـب خـبـرة البـاحـــث.

2 - تجنب الفجوات أو التداخل بين الفترات.

3 - يكون طول الفترة بحيث أن تكون البيانات داخل الفترة أقرب ما يمكن إلى منتصفها.

$$\text{مركز الفترة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$$

ذكـرنا سـابقـا أن طول الفـتـرات فى الجـدول يجب أن تـكون مـتـسـاوية وذلك لسهولة التعامل معها ولكن فى بعض الحالات تستخدم فترات غير متساوية الطول لوجود غرض من وراء ذلك. فمثلا إذا كان الغرض من الدراسة الاهتمام ببعض الفترات والتركيز عليها ولا يهمنا باقى الفترات الأخرى كذلك إذا كان التكرار لبعض الفترات صغيرا جدا مقارنة بباقى التكرارات يمكن دمج هذه الفترات معا.

ثانيا: المدرج التكرارى:

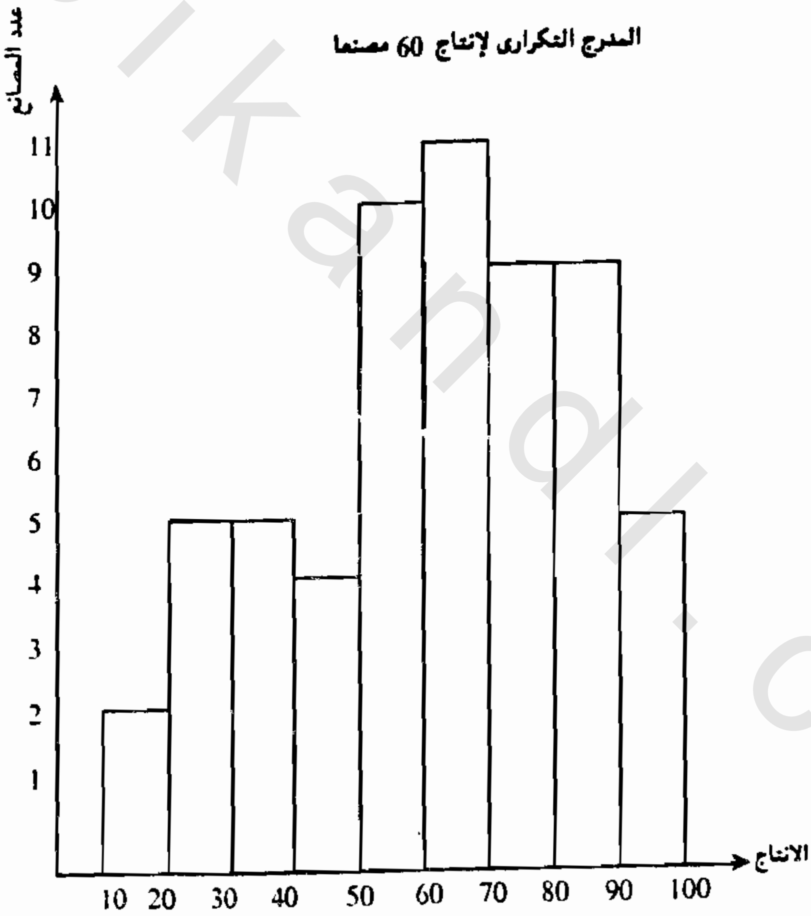
هو عـبارة عن مـسـتطيلات رأسـيـة ارتفـاعـهـا يـمـثل التكرارات أما قـاعـدتهـا فتمثل فترة الفئة. وتتلخص فى الآتى:

1 - تكوين الجدول التكرارى.

2 - يحدد المحور الأفقى للفترات (ليس من الضرورى البداية من الصفر).

3 - يحدد المحور الرأسى للتكرار وحسب الطول المتوفر يقسم إلى وحدات بحيث تضمن رسم أكبر تكرار على أن تبدأ من الصفر.

4 - نبدأ بتحديد بداية كل فترة ونهايتها ثم يحدد التكرارات المقابلة لكل فترة ليتكون بذلك المدرج التكرارى كما بالشكل (شكل 90)



شكل 90

وبالنظر إلى هذا الشكل يتضح أن معظم المصانع إنتاجها مرتفع وأن أكثر المصانع إنتاجا بين 60 - 70 أو أقل إنتاجا بين 10 - 20 وعلى العموم فإن معظم المصانع كان إنتاجها أكبر من 50.

ثالثا: المضلع التكراري:

فى هذا النوع من التمثيل تمثل الفترات بمراكزها ومن ثم فإننا نعين نقاطا (x , y) بحيث x = مركز الفئة (مركز الفترة)

y = تكرار الفئة.

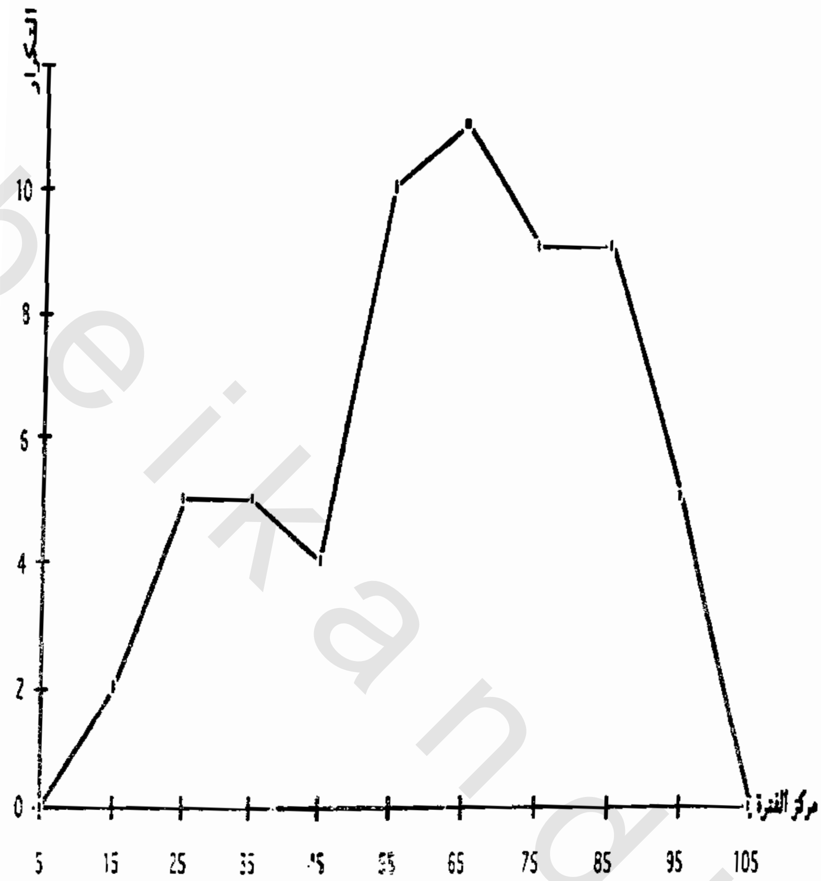
ثم نصل بين النقاط بقطع مستقيمة ويغلق المضلع من طرفيه بإضافة نقطتين (x_o , o) , (x_I, o) حيث

x_o هى مركز الفترة ما قبل الأولى.

x_I هى مركز الفترة ما بعد الأخيرة والتى تكرارها أيضا صفر.

ويسمى الشكل الناتج بالمضلع التكرارى. شكل 91

الفترة	10-0	20-10	30-20	40-30	50-40	60-50	70-60	80-70	90-80	100-90	110-100
مركز الفترة	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105



شكل 91

وهذا النوع من الرسومات يفضل استخدامه عند مقارنة ظاهرتين أو أكثر بيانيا فنجد أن المقارنة سهلة وواضحة.

رابعا: المنحنى التكرارى :

فى هذا النوع من التمثيل البيانى يسير العمل كما فى حالة المضلع التكرارى دون الاستعانة بالفترتين الاضافتين (قبل الأولى وبعد الأخيرة) وتوصيل النقاط لعمل المنحنى بحيث يكون مارا بأكثر عدد من النقاط.

كما إنه إذا زادت عدد الفترات وصغر طول الفترة إقترب المضلع التكرارى من أن يكون منحنيا وفى هذه الحالة يسمى بالمنحنى التكرارى.

التكرار المتجمع الصاعد والنازل:

فى بعض الحالات نود معرفة عدد التكرارات أو البيانات التى تزيد قيمتها عن قيمة معينة أو تقل عن قيمة معينة، مثلا عندما نود أن نعلم عدد الناجحين أى عدد الحالات التى تزيد درجاتهم عن 50 ، وهذه غير واضحة بسهولة فى الجدول السابق، وعلى ذلك فقد وضع جدول لمثل هذه الحالات يوضح الإجابة على مثل هذه التساؤلات كما يلى:

فى المثال السابق إذا أردنا الحصول على جدول التكرار المتجمع الصاعد أو النازل علينا جمع التكرارات المناظرة لكل فترة وإلى قبلها فنحصل على مجموع التكرارت أى التكرار المتجمع الصاعد حسب تلك الفترة كما هو موضح فى الجدول التالى:

جدول التكرار المتجمع الصاعد لإنتاج 60 مصنعا

الفترة	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	100-90
التكرار	2	5	5	4	10	11	9	9	5
أقل من	20	30	40	50	60	70	80	90	100
التكرار المتجمع الصاعد	2	7	12	16	26	37	46	55	50
أكبر من	10	20	30	40	50	60	70	80	90
التكرار المتجمع النازل	60	58	53	48	44	34	23	14	5

ويمكن توضيح جدول التكرار المتجمع الصاعد والنازل بطريقة أخرى بحيث يكون مجموع التكرارين فى كل فترة مساويا التكرار الكلى للتكرار وذلك كما يلى:-

القيمة الصاعد	التكرار المتجمع	القيمة	التكرار المتجمع النازل
أقل من 10	صفر	10فأكثر	60
أقل من 20	2	20 فأكثر	58
أقل من 30	7	30 فأكثر	53
أقل من 40	12	40 فأكثر	48
أقل من 50	16	50 فأكثر	44
أقل من 60	26	60 فأكثر	34
أقل من 70	33	70 فأكثر	23
أقل من 80	46	80 فأكثر	14
أقل من 90	55	90 فأكثر	5
أقل من 100	60	100 فأكثر	صفر

مثـــــال :

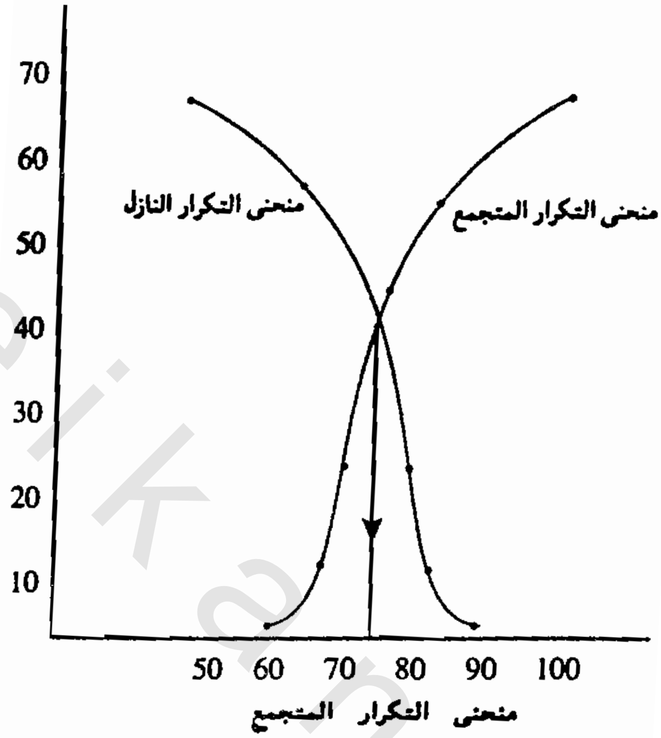
إرسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى لتكرار المتجمع النازل للتوزيع التكرارى التالى - عين من الرسم القيمة الوسطى للبيانات المعطاه فى جدول التوزيع التكرارى:

الفترة	50-	56-	62-	68-	74-	80-	86-	89-92
التكرار	1	6	12	15	22	10	6	3

الحـــل :

نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل ثم رسمهما بيانيا وكما يبين شكل (92) أن القيمة الوسطى هى القيمة التى تقابل تكرارا مجتمعا يساوى نصف مجموع الحالات أى تساوى $37 \frac{1}{2}$

التكرار المتجمع الصاعد		التكرار المتجمع النازل	
الحد	التكرار	الحد	التكرار
أقل من 50	صفر	50 فأكثر	75
أقل من 56	1	56 فأكثر	74
أقل من 62	7	62 فأكثر	68
أقل من 68	19	68 فأكثر	56
أقل من 74	34	74 فأكثر	41
أقل من 80	56	80 فأكثر	19
أقل من 86	66	86 فأكثر	9
أقل من 92	7.2	92 فأكثر	3
أقل من 98	75	98 فأكثر	صفر


70
60
50
40
30
20
10
منحنى التكرار النازل
منحنى التكرار المتجمع
50 60 70 80 90 100
منحنى التكرار المتجمع

شكل 9 2

النزعة المركزية:

بالتمعن فى الظواهر التى حولنا والقيم التى تأخذها العناصر المختلفة لهذه الظواهر نلاحظ أن أغلب قيم هذه الظواهر قريبة من بعضها البعض أى أنها تتجمع حول قيمة معينة غير منظورة فمثلا نجد دخل أو ذكاء أو طول معظم الأشخاص فى مجموعة أو مجتمع ما تقرب أو تتجمع حول قيمة معينة وهناك عدد قليل من الأفراد أى من القيم يبتعد عن هذا التجمع من ناحية الصغر أو الكبر أى أن هذه القيمة كأنها تعمل على جذب القيم ناحيتها أى كأن هناك قابليته أو رغبته أو نزعة عند هذه القيم للتجمع والاقتراب من هذه القيمة، هذه الظاهرة سميت ظاهرة النزعة المركزية، وقد سميت بالنزعة لأنها ظاهرة طبيعية لا يمكن التحكم فيها وفى الواقع هناك عدة متوسطات للتعبير عن هذه الظاهرة منها:

1- المتوسط الحسابى:

ويعرف بأنه يساوى مجموع البيانات مقسومة على عددها.

2- الوسيط:

ويعرف بأنه القيمة التى تقسم البيانات الى مجموعتين بحيث يكون عدد القيم التى أكبر منها مساويا لعدد القيم التى أصغر منها، وإذا كان عدد القيم زوجيا يكون الوسيط هو متوسط القيمتين التى رتبتهما $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{2} + 1$

3 - **المنوال:**

في بعض الحالات نجد أن البيانات التي لدينا مصنفة حسب نوعية معينة أو صفة أي إنها مقسمة إلى أنواع أو إلى مجموعات ليست عددية مثل الجنس أو المستوى العلمي.. إلخ. مما دعت الضرورة إلى وجود مقياس من آخر يعبر عن هذه الحالات وهو المنوال.

ويعرف المنوال بأنه القيمة الأكثر إنتشارا. ويمكن أن يؤخذ بالعدد المقابل لأعلى تكرار.

التشتت

لقد اتضح لنا مما سبق أن المتوسطات كمقياس للنزعة المركزية تغطى وصف وتوضح فكرة عامة عن البيانات التى حسبت منها، ومما لا شك فيه أن هذه الفكرة والوصف يتوقف على نوع البيانات والمتوسط المستخدم لوصفها. وفى الواقع إذا أردنا أن تكون الفكرة والوصف شاملا ودقيقا وأقرب إلى واقع البيانات فلا نستطيع الاعتماد على الوصف بالمتوسطات فقط.

كذلك عند مقارنة ظاهرتين تساوت خاصية النزعة المركزية لهما أى تساوت متوسطاتهما فاعتمادنا فى المقارنة على خاصية واحدة غالبا ما تكون بعيدة عن الواقع فمثلا إذا كانت درجات طالبين فى خمسة اختبارات لمادة كالآتى:

درجات الطالب الأول : 52 3 74 98 37

درجات الطالب الثانى : 52 53 50 51 54

نجد أن المتوسط «الوسيط» = 52

ونجد أن درجات الطالب الثانى متقاربة ومتجانسة - أى أن الفروق بينها صغيرة. أما درجات الطالب الأول يلاحظ أن الفروق بينها كبيرة أى إنها غير متجانسة. وعلى ذلك تكون درجات الطالب الثانى أقل اختلافا وأقل تشتتا بعكس الطالب الأول التى تكون درجاته أكثر اختلافا وأكثر تشتتا - وهذا ما يعرف بظاهرة التشتت.

مقاييس ظاهرة التشتت:

1 - المدى
2 - الانحراف الربيعى
3 - الانحراف المطلق
4 - الانحراف المعيارى
5 - معامل الاختلاف

وسوف نقتصر فى دراستنا على المدى والانحراف المعيارى.

المدي (Range) :

هو أبسط مقاييس التشتت مفهوما حيث أنه يوضح فكرة عامة وبسيطة عن تشتت البيانات.

وقيمته تساوى أكبر قيمة مطروحا منها أصغر قيمة فى البيانات. فإذا رمزنا للمدى بالرمز R فإنه يساوى :-

$$R = x_{max} - x_{min}$$

حيث: x_{max} أكبر بيان

x_{min} أصغر بيان

مثال :

إذا كان دخل (6) منتجين بإحدى المنشآت كالآتى:

260 190 180 220 100 140

أوجد المدى:

الحــــل:

$$R = x_{max} - x_{min}$$
$$= 260 - 100 = 160$$

بالرغم من بساطة هذا المقياس إلا أننا نجد له استخدامات عديدة فى المجالات الاقتصادية والاجتماعية فمثلا يقال أن سعر سلعة معينة فى السوق اليوم كان من كذا إلى كذا وإن درجة الحرارة كانت من 22 إلى 32 أو أن سن الزواج فى إحدى المدن من 17 إلى30 مثلا وهكذا.

الانحراف المعيارى (Standard deviation):

يعتبر الانحراف المعيارى من أهم المقاييس الاحصائية للتشتت وهو الأكثر استخداما فى القوانين والنظريات الاحصائية وذلك لأنه يعطى فكرة سليمة ومنطقية عن ظاهرة التشتت ويعرف بأنه :

الجذر التربيعى لمتوسط مربع إنحرافات القيم عن متوسطها.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_r - \bar{x})^2}{n}}$$

$\sigma =$ الانحراف المعيارى

$x_r =$ القراءات أو البيانات ، $\bar{x} =$ متوسط القراءات

$n =$ عدد البيانات ، $\sum$ المجموع

وقد وجد أنه من الأدق أن نقسم مجموع مربع الانحرافات على $(n - 1)$ بدلا من n ويتم ذلك كالآتى:

$$\sigma^2 (n-1) = \sum (x_r - \bar{x})^2$$

$$= \sum (x_r^2 - 2\, x_r \bar{x} + \bar{x}^2$$

$$= \sum (x_r^2 - 2\, \bar{x} \sum x_r + \sum \bar{x}^2$$

$$= \sum x_r^2 - 2\, n\, \bar{x}^2 + n\, \bar{x}^2$$

$$= \sum x_r^2 - \frac{(\sum x_r)^2}{n}$$

وهذه الصيغة أسهل فى التعامل حيث التعامل يكون مع القراءات الأصلية بدلا من الانحرافات عن المتوسط

مثال:

إذا كانت درجات 10 طلبة فى إحدى الاختبارات فى مادة كالآتى:

6 - 8 - 9 - 5 - 8 - 7 - 8 - 6 - 7 - 8

فاحسب الانحراف المعيارى

الحل:

$$\sum x_r^2 = 6^2 + 8^2 + 9^2 + \qquad 8^2$$

$$= 532$$

$$\sum x_r = 6 + 8 + 9 + 5 + 8 + 7 + 8 + 6 + 7 + 8$$

$$= 72$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_r^2 - \frac{(\sum x_r)^2}{n}}{n - 1}$$

$$= \frac{532 - \frac{(72)^2}{10}}{9} = 1.5$$

$$\therefore \sigma = 1.2$$

حساب الانحراف المعيارى فى حالة وجود تكرارات:

على فرض أن f_r تمثل التكرارات فيكون النحراف الميعارى σ :

$$\sigma^2 = \frac{1}{(\sum f_r - 1)}\left[\sum f_r x_r^2 - \frac{(\sum f_r x_r)^2}{f_r}\right]$$

مثـــال :

إذا كانت درجات 30 طالبا فى إحدى الاختبارات كالآتى:

الدرجة	(x_r)	4	6	7	9	10
العدد	(f_r)	6	8	10	4	2

أوجد الانحراف المعيارى.

الحـــل :

الدرجة x_r	7	6	7	9	10	Σ
التكرار f_r	6	8	10	4	2	30
$f_r x_r$	24	48	70	36	20	198
x_r^2	16	36	49	81	100	-
$f_r x_r^2$	96	288	490	324	200	1348

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{29}\left(1348 - \frac{(198)^2}{30}\right)$$

$$= 1.42$$

$$\sigma = 1.18$$ درجة

حساب الانحراف المعيارى من الجداول التكرارية:

إذا كانت لدينا بيانات فى جدول تكرارى (بدون فترات مفتوحة) واردنا حساب الانحراف المعيارى لهذه البيانات. نحسب أولا مركز الفترات ثم نتبع الطريقة السابقة كما فى المثال التالى:

مثال:

إذا كان الجدول التالى يوضح المصروفات الشهرية لعدد من المنشآت والمطلوب حساب الانحراف المعيارى لهذه البيانات.

المصروفات بالألف x^r	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	المجموع
عدد المنشآت f_r	10	15	20	12	3	60

الحـــل:

المصروفات بالألف x_r	0-2	2-4	4-6	6-8	8-10	المجموع
التكرار f_r	10	15	20	12	3	60
مركز الفترة c	1	3	5	7	9	—
$f_r\ x_c$	10	45	100	84	27	266
x_c^2	1	9	25	49	81	—
$f_r\ x_c^2$	10	135	500	588	283	176

$$\left(\Sigma\ (f_r\ x_c)^2\right) = (266)^2 = 70756$$

$$\Sigma\ f_r\ x_c^2 = 1516$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_r x_c^2 - \frac{(\sum f_r x_c)^2}{n} n}{n - 1}$$

$$= 5.7$$

$\sigma = 2.4$ ألف دينار

ملحوظة :

1 - لا يتأثر الانحراف المعياري إذا أضيف أو طرح عددا ثابتا من كل القيم.

2 - يتأثر الانحراف المعياري بالضرب أو القسمة على المقادير الثابتة لكل القيم.

تماريــــــن (34)

1 - الجدول التالى يبين التوزيع التكرارى لدرجات الطلبة فى إحدى المواد.

الفترة	5-	10-	15-	20-	25-	30-	35-	40-45
التكرار	4	22	28	18	12	9	4	3

والمطلوب إيجاد : 1 - المتوسط الحسابى

2- الانحراف المعيارى

2 - ارسم المنحنى التكرارى للتوزيع التالى :

الفترة	50-	60-	70-	80-	90-	100-	110-	120-130
التكرار	4	22	28	18	12	9	4	3

والمطلوب إيجاد : 1 - المتوسط الحسابى

2- الانحراف المعيارى

2 - ارسم المنحنى التكرارى للتوزيع التالى :

الفترة	0-	10-	20-	30-	40-	50-	60-	70-80
اللغة العربية	1	3	2	13	29	31	13	3
اللغة الانجليزية	3	5	10	15	19	22	15	4

والمطلوب إيجاد :

1 - قارن بين تشتتى الدرجات عن طريق رسم منحنيين تكرارين لهما.

2 - إحسب المتوسط الحسابى، الانحراف المعيارى لكل من التوزيعين.

4 - عرف الآتى :

الوسط الحسابى - الوسط - المدى - التشتت - مقاييس التشتت

5 - الجدول التالى بين الدخل الاسبوعى لمجموعة من المنتجين المهرة (بالدينار) لعدد وحدات معينة.

الدخل	عدد الوحدات
66.0 فأكثر	142
66.5 فأكثر	131
67.0 فأكثر	116
67.5 فأكثر	92
68.0 فأكثر	52
68.5 فأكثر	32
69.0 فأكثر	18
69.5 فأكثر	7

والمطـــلوب:

أ- كون جدول توزيع تكرارى من هذا الجدول.

ب - أعد تنظيم البيانات السابقة فى جدول توزيع تكرارى متجمع صاعد.

جـ - مثل التوزيعين المتجمع الصاعد والمتجمع النازل بيانيا.

د - من الرسم البيان فى جـ أوجد القيمة الوسطى للدخل لهؤلاء المنتجين.

6 - من جدول التكرار التالى ، كون جدولا يتضمن التكرار المتجمع الصاعد والمتجمع النازل. إرسم منحنى كل تكرار واستخدم الرسم فى إيجاد الوسيط.

الفترة	-20	-25	-30	-35	-40	-50	-45	-55	65-60
التكرار	3	9	13	16	20	15	13	8	3

المراجع العربيـــــة

1 - حساب التفاضل، والتكامل والهندسة التحليلية - تأليف ج. ب. توماس ترجمة الدكتور موفق دعبول وآخرين - منشورات جامعة الذاتج الطبعة الثانية 1979

2 - الهندسة : د. فؤاد محمد رجب - الأستاذ على أحمد حمدى - مطابع الثورة العربية 1993 الجماهيرية العربية الليبية.

3 - الاحصاء : د. سياما داش - الاستاذ على أحمد حمدى - مطابع الثورة العربية 1993 الجماهيرية العربية الليبية.

4 - حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية: تأليف وليم هـ.دورفى / كلية مونت هوليوك الدار الدولية للنشر والتوزيع. ترجمة الدكتور محمد على محمد السمرى جامعة حلوان، جمهورية مصر العربية. الطبعة الثانية 1992.

المراجع الأجنبية

1- Engineering formulas - kurt Gieck Third Edition - 1873 - McGraw- Hill Book Comp. Printed in W. Gery many.

2- Golden book in Matematics. Mr. Ayman Eissa, mr. Mohamed Hasan. (المكتبة المصرية بالفعالة . جمهورية مصر العربية)